MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

Les guides fondamentaux pour enseigner

La construction du nombre à l'école maternelle

Cet ouvrage a été coordonné par le service de l'instruction publique et de l'action pédagogique et le service de l'accompagnement des politiques éducatives de la direction générale de l'enseignement scolaire du ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. Il a été rédigé, relu et coordonné avec le concours de l'Inspection générale de l'éducation, du sport et de la recherche.

Ce document a fait l'objet d'une relecture critique de plusieurs membres du Conseil scientifique de l'éducation nationale.

Questions fréquentes sur l'enseignement des premiers outils mathématiques

Les élèves qui arrivent en petite section savent-ils compter ?

Non, les élèves qui entrent en petite section ne savent pas tous compter. La moitié d'entre eux savent donner « trois cubes » quand on le leur demande. En revanche, tous ont déjà fréquenté les nombres d'une manière implicite. Leur maîtrise en est cependant inégale. La recherche indique que les enfants de cet âge auraient une compréhension intuitive de l'arithmétique simple. Pour les élèves, les difficultés pour appréhender les nombres apparaissent souvent quand il s'agit de mettre en œuvre ces savoirs dans des tâches plus complexes (cf. chapitre 1) et de commencer un enseignement explicite, indispensable pour manipuler des nombres plus grands que « trois ».

Peut-on proposer, en petite section, une situation mathématique impliquant six objets alors que les élèves ne maîtrisent que les mots-nombres 1, 2 et 3 ?

Oui, des situations impliquant six objets alors que les élèves ne maîtrisent que les mots-nombres 1, 2 et 3 peuvent être proposées pour des comparaisons de collections. Prenons l'exemple d'une activité pouvant être résolue par des élèves de trois ans : chaque élève dispose de six assiettes et de cinq fourchettes. La question porte sur l'égalité ou non des quantités des deux collections. Pour mettre la table, il faut une fourchette pour chaque assiette. Il ne faut pas qu'il reste des assiettes sans fourchette ou inversement. Le matériel étant déplaçable, l'élève peut placer une fourchette dans chaque assiette et se rendre compte qu'il reste une assiette sans fourchette. Cette procédure de correspondance terme à terme n'implique pas de savoir dire la quantité de fourchettes ou d'assiettes. Cette situation portant sur des quantités supérieures à trois peut être proposée à des élèves de trois ans (cf. « Le nombre en tant que quantité avec sa désignation orale » dans le chapitre 3).

Doit-on systématiquement faire compter le nombre de présents par les élèves ?

Non. L'adverbe « systématiquement » fait référence à un rituel. Une activité ritualisée est une activité proposée régulièrement aux élèves pendant une période de l'année. Elle est en lien avec une séquence d'apprentissage, au cours de laquelle les élèves ont manipulé du matériel, ont expérimenté des procédures, les ont verbalisées.

Oui, si cela répond à un apprentissage précis. Le focus « Décomposer et composer les nombres jusqu'à 10 : un exemple de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle » présente une activité ritualisée qui consiste à dénombrer les élèves absents afin de travailler sur de petits nombres. La possibilité de proposer cette activité au-delà de quatre absents dépend de la progression atteinte sur le nombre en tant que quantité. De plus, cette activité peut être pertinente si elle est utilisée pour travailler la comptine numérique, notamment en moyenne section. Si le principe cardinal est acquis, les élèves peuvent comprendre que l'on compte jusqu'à 21 et que l'on dise « il y a 21 présents ».

Pourquoi, lorsque l'on demande à un élève combien il y a d'éléments dans une collection, énonce-t-il la comptine des nombres sans répondre par un mot-nombre comme attendu par la question « combien » ?

Cet élève ne semble pas avoir construit la notion de quantité liée à la cardinalité du nombre. Pour lui, le nombre n'est pas encore totalement un indicateur de la quantité. Brissiaud[1] explique cela en distinguant le comptage-numérotage et le comptage-dénombrement. Parmi les élèves qui comptent les jetons du premier jusqu'au huitième, dans une collection de huit jetons, certains attribuent un nom de nombre à chaque jeton sans que ce nom exprime le nombre de jetons. Ils ont compté jusqu'à huit, mais cela ne signifie pas pour eux qu'il y a huit jetons dans la collection et que ce huit exprime une quantité bien précise. Ils ont effectué un comptage-numérotage. Pour d'autres élèves en revanche, « huit » exprime bien une quantité, c'est-à-dire que, pour eux, toutes les collections de huit objets ont autant d'objets, la même quantité, le même nombre. Ces élèves ont effectué un comptage-dénombrement.

*Pour inciter au comptage-dénombrement, le professeur peut insister pour que les élèves mettent en lien les noms des nombres et le dénombrement : « **un** jeton et encore un jeton, ça fait **deux** jetons, et encore un jeton, ça fait **trois** jetons… et encore un jeton, ça fait **huit** jetons ».*

1 — Brissiaud Rémi, « Calculer et compter de la petite section à la grande section », *Grand N*, n° 49, p. 37-48, 1991.

Les enfants comptent avec leurs doigts, est-ce une bonne chose ?

Oui, le comptage sur les doigts est une étape pour accéder au comptage verbal. Cette transition est progressive et dépend principalement de la capacité de l'enfant à contrôler mentalement le déroulement du calcul et à conserver une trace de ce qui a été et de ce qui reste à compter. Les élèves utilisent plusieurs stratégies, la première en partant de 1 : 3 + 4 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ; la seconde à partir du premier terme de l'opération : 3, 4, 5, 6, 7 ; et peu à peu à partir du nombre le plus grand, 4, 5, 6, 7. Des procédures équivalentes sont relevées sur les soustractions.

Peut-on proposer des situations de résolution de problèmes dès la petite section ?

Oui, des situations-problèmes doivent être proposées dès la petite section. La confrontation à des résolutions de problèmes constitue une des quatre modalités d'apprentissage de la maternelle. Les problèmes arithmétiques évoqués dans le programme d'enseignement portent sur des nombres en tant que quantité (composition de deux collections, ajout ou retrait à une collection, produit ou partage) ou sur des nombres en tant que position (déplacements en avant ou en arrière). Il est nécessaire d'avoir déjà acquis l'utilisation des nombres en tant que quantité ou position avant de proposer ces problèmes arithmétiques.

De nombreux exemples de problèmes pouvant être proposés en petite section sont présentés dans cette ressource.

Comment différencier son enseignement de la construction du nombre ?

La différenciation repose sur une évaluation fine des progrès et des acquis des élèves. La régulation des situations d'apprentissage proposées passe par une connaissance fine, par l'enseignant, du positionnement de chaque élève dans le parcours conduisant aux apprentissages sur le nombre attendus à la fin de l'école maternelle. L'enseignant planifie, régule et différencie les activités qu'il propose aux groupes d'élèves en variant notamment la taille des collections, le fait de pouvoir agir directement ou non sur les objets (les déplacer, les manipuler ou non), le fait d'avoir à anticiper la réponse lorsque les objets sont éloignés ou dissimulés, le fait d'être contraint à formuler, oralement ou par écrit, la quantité d'objets à aller chercher. Ces variables importantes amènent progressivement les élèves à faire évoluer leurs procédures et à construire les savoirs attendus (cf. « Comment construire un enseignement progressif pour chaque fonctionnalité du nombre » dans le chapitre 3).

Sommaire

Introduction

Durant les trois années de l'école maternelle, en plus des autres compétences mathématiques, l'élève acquiert les bases essentielles sur le nombre, les quantités, les opérations simples, et apprend à utiliser ces connaissances en résolvant des problèmes. À la fin de la grande section, l'enfant doit notamment décomposer et recomposer des quantités jusqu'à au moins 10 et connaître la comptine jusqu'à au moins 30. Il résout des problèmes et anticipe des positions qui seront atteintes après un déplacement. Il donne le nombre d'objets d'une collection après augmentation, diminution, partage équitable…

L'école maternelle est une école ambitieuse, portée par la volonté affirmée de lutter contre les inégalités en permettant à tous les enfants, dès trois ans, d'évoluer dans un environnement sécurisant, qui tient compte de leurs besoins, pour favoriser leur développement et leurs apprentissages. Les compétences mathématiques acquises à la maternelle sont essentielles pour se projeter avec confiance dans les apprentissages fondamentaux de l'école élémentaire et au-delà.

À l'école maternelle, la fréquentation des mathématiques s'effectue de manière quotidienne et toutes les occasions doivent être saisies pour mobiliser, développer et renforcer les habiletés mathématiques. Dans les activités où les mathématiques sont convoquées, il s'agit donc de définir précisément des objectifs d'apprentissage. Les derniers résultats de la recherche préconisent une mise en œuvre pédagogique progressive et structurée qui repose sur une combinaison réfléchie et alternée de formes et de modalités d'enseignement, en classe entière, lors de travaux de groupe ou dans le cadre d'activités individuelles.

L'évolution du programme d'enseignement de l'école maternelle publié au BOENJS n° 25 du 24 juin 2021[2] s'inscrit dans la continuité des avancées de la recherche et précise que l'enseignement des premiers outils mathématiques « s'attache à stimuler chez les élèves la curiosité, le plaisir et le goût de la recherche » (domaine 4).

Le présent guide porte ainsi sur un des objets fondamentaux des premiers outils mathématiques : la construction du nombre. Il s'adresse aux enseignants comme aux formateurs. Son objectif est de faire connaître les derniers éléments de la recherche en didactique des mathématiques, notamment sur la pluralité des processus en jeu dans la construction du nombre à l'école maternelle.

Le chapitre 1 établit un état de la recherche en psychologie cognitive appliquée au domaine des mathématiques dès le plus jeune âge. Le chapitre 2, quant à lui, propose un éclairage scientifique sur la didactique des mathématiques en maternelle. Ces enjeux sont illustrés dans le chapitre 3 par des situations variées, structurées et progressives pour une mise en œuvre pragmatique en classe.

2 — https://cache.media.education.gouv.fr/file/25/86/5/ensel550_annexe_1413865.pdf.

I

Développement cognitif et apprentissage premier de la numération

Le but de ce chapitre est de présenter les résultats de la recherche en psychologie cognitive sur les apprentissages numériques, qui ont lieu au cours de la petite enfance. Nous verrons que les enfants possèdent, dès la naissance, des représentations mentales qui pourront constituer la base sur laquelle les apprentissages formels en maternelle viendront se greffer. Lorsque l'enfant parvient à associer symboles numériques (mots-nombres et chiffres arabes) et quantités, il a construit le « sens » du nombre[3], ce qui lui permettra d'asseoir ses apprentissages numériques et mathématiques ultérieurs.

Ce cheminement vers une représentation abstraite et signifiante des quantités sera décrit ici dans une première sous-partie. Dans une deuxième sous-partie, les travaux issus des modèles théoriques relevant de la psychologie cognitive et ouvrant des pistes sur la manière d'aider les enfants à parcourir ce chemin vers la construction du concept de nombre seront présentés.

En route vers l'abstraction : progressivité des apprentissages numériques

Un sens précoce des quantités

Les enfants entrent à l'école maternelle avec des intuitions riches sur les nombres et les quantités, dont certaines sont déjà présentes dès les tout premiers mois de vie. Ainsi, en 2009, une équipe de chercheuses de l'université Paris-Descartes a pu mettre en évidence ces intuitions chez des nouveau-nés de quelques jours

3 — Dehaene Stanislas, *La Bosse des maths : quinze ans après* (nouvelle édition revue et augmentée), Paris, Odile Jacob, 2010.

à peine[4]. Dans cette étude, on faisait entendre à des bébés des séquences de syllabes, par exemple « tu-tu-tu-tu » ou « ra-ra-ra-ra ». La syllabe changeait, mais toutes les séquences comportaient le même nombre de syllabes. Au bout de deux minutes, les chercheuses ont alors commencé à montrer des images aux bébés, tandis que la bande-son avec les séquences de syllabes continuait à jouer. Ces images comportaient pour certaines le même nombre d'objets que les séquences sonores, pour d'autres un nombre d'objets (très) différent. Les résultats de l'étude montrent que les nouveau-nés réagissent quand les nombres présentés sont concordants en audition et en vision. Ainsi, dès les toutes premières heures de vie, les nourrissons sont capables de percevoir des quantités numériques. L'intérêt de cette étude est que les quantités ne sont pas présentées dans un seul format visuel, mais aussi dans un format auditif. L'appréhension par les bébés d'un nombre de syllabes entendues exclut la possibilité que leur jugement des quantités soit basé uniquement sur des indices continus comme la place occupée par les objets ou leur densité.

Les résultats de cette étude ont été répliqués plusieurs fois, en utilisant des nombres différents, et montrent que les bébés sont capables de distinguer des quantités numériques, dès lors que les contrastes sont suffisamment marqués. Ainsi, à la naissance, les bébés distinguent des collections de quatre éléments de collection de douze éléments, des collections de six et de dix-huit, ou de trois et de neuf[5]. Ils ne parviennent toutefois pas à distinguer quatre de huit, car ces quantités sont trop proches entre elles pour leur permettre de les différencier. Plus tard, la perception des quantités s'affine : à 6 mois, les nourrissons distinguent des quantités dans un rapport de 1 pour 2 (par exemple, 4 *versus* 8, ou 8 *versus* 16) ; à 9 mois, ils peuvent distinguer un rapport de 2 pour 3 (8 *versus* 12, 16 *versus* 24)[6]. Cette capacité à percevoir les nombres approximatifs reste présente tout au long de la vie, tout en continuant à s'affiner progressivement. Ainsi, d'un coup d'œil, un adulte peut distinguer des collections de 9 *versus* 10 objets. Néanmoins, les quantités perçues restent approximatives : personne ne peut distinguer deux collections de 99 *versus* 100 objets sans passer par le comptage. En maternelle, typiquement, les enfants parviennent à distinguer des rapports de 3 pour 4 (exemple 12 *versus* 16), voire de 6 pour 7 (exemple 12 *versus* 14) pour les enfants les plus grands[7].

4 — Izard Véronique, Sann Coralie, Spelke Elisabeth S., Streri Arlette, “Newborn Infants Perceive Abstract Numbers”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n° 106(25), p. 10382-10385, 2009.

5 — Coubart Aurélie, Izard Véronique, Spelke Elizabeth S., Marie Julien, Streri Arlette, “Dissociation Between Small and Large Numerosities in Newborn Infants”, *Developmental Science*, n° 17(1), p. 11-22, 2014.

6 — Mou Yi, vanMarle Kristy, “Two Core Systems of Numerical Representation in Infants”, *Developmental Review*, n° 34(1), p. 1-25, 2014.

7 — Halberda Justin, Feigenson Lisa, “Developmental Change in the Acuity of the ‘Number Sense’: The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-Year-Olds and Adults”, *Developmental Psychology*, n° 44(5), p. 1457-1465, 2008.

Un sens précoce du calcul

Les capacités précoces ne se limitent pas à la perception des quantités. Ainsi, les nourrissons sont également capables d'effectuer des opérations sur des collections d'objets. Par exemple, dans le cadre d'une étude effectuée à l'université de Yale, des chercheuses ont montré des animations à des enfants de six mois[8]. Dans un problème d'addition, le bébé voyait d'abord un premier ensemble de cinq objets se cacher derrière un écran opaque, suivi par un deuxième ensemble de cinq objets. L'écran se soulevait alors pour révéler, selon les cas, dix objets (résultat attendu) ou seulement cinq objets (résultat erroné). D'autres animations mettaient en scène des soustractions, toujours à l'aide d'objets se cachant derrière des écrans opaques. Les résultats montrent que les nourrissons réagissent quand on leur présente des résultats erronés : cela démontre qu'ils se forment des attentes par rapport au nombre d'objets présents derrière les écrans lorsqu'ils visionnent les animations. D'autres études montrent que les nourrissons sont également capables de calculer des proportions entre deux nombres[9]. Ainsi, outre leur capacité à percevoir les nombres, ils sont également capables de les manipuler pour effectuer des calculs. Il s'agit néanmoins, dans tous les cas, de calculs approximatifs. En effet, si par exemple, pour l'addition 5 + 5 décrite ci-dessus, les enfants rejettent un résultat de type 5 + 5 = 5, ils sont prêts à accepter 5 + 5 = 8 ou 5 + 5 = 12.

Ces intuitions sur les calculs sont toujours présentes chez les enfants lorsqu'ils sont en âge d'aller à l'école maternelle. Ainsi, lorsqu'on leur demande d'effectuer des additions et des soustractions sur des collections d'objets, les jeunes enfants sont tout à fait capables de savoir où se trouvent le plus d'objets[10]. Bien sûr, ils ne peuvent pas voir la différence entre 28 objets + 12 objets et 41 objets (un adulte n'y parviendrait pas non plus !), mais ils peuvent, par exemple, reconnaître que la réunion de deux collections de vingt-huit et douze objets contient plus d'objets qu'une collection de trente objets, et moins d'objets qu'une collection de quatre-vingts objets.

En grande section de maternelle, les enfants sont également capables de faire le même genre de calculs approximatifs avec des symboles[11]. On peut, par exemple, leur soumettre la question suivante : « Léa a vingt-huit billes, on lui en donne douze de plus. Arthur a trente billes. Qui a le plus de billes : Léa ou Arthur ? » Si les nombres sont assez distants, les enfants peuvent trouver la réponse à ce genre de problèmes simples. Ainsi, dès que les enfants parviennent à associer nombres et quantités, les symboles numériques héritent de toutes les propriétés intuitives des quantités.

8 — McCrink Koleen, Wynn Karen, “Large-Number Addition and Subtraction by 9-Month-Old Infants”, *Psychological Science*, n° 15(11), p. 776-781, 2004.

9 — McCrink Koleen, Wynn Karen, “Ratio Abstraction by 6-Month-Old Infants”, *Psychological Science*, n° 18(8), p. 740-745, 2007.

10 — Barth Hilary, La Mont Kristen, Lipton Jennifer, Spelke Elizabeth S., “Abstract Number and Arithmetic in Preschool Children”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n° 102(39), p. 14116-14121, 2005.

11 — Gilmore Camilla K., McCarthy Shannon E., Spelke Elizabeth S., “Symbolic Arithmetic Knowledge Without Instruction”, *Nature*, n° 447(7144), p. 589-591, 2007.

Les enfants sont donc capables d'effectuer mentalement des calculs approximatifs avant même qu'on ne leur enseigne les règles des opérations arithmétiques.

Si le propos s'est concentré jusqu'ici sur les grands nombres, c'est parce que, pour ce qui est de la perception, les petits et les grands nombres ne font pas appel aux mêmes systèmes cognitifs[12]. On retrouve cette dissociation à tous les âges. Chez l'adulte comme chez l'enfant, les petites quantités (de 1 à 3, parfois même 4) sont perçues de manière précise et immédiate : c'est ce que l'on appelle la « subitisation[13] » (ou *subitizing* en anglais). D'un point de vue cognitif, la perception des petites quantités ne repose pas sur un système de traitement des collections dans leur ensemble, mais sur le traitement en parallèle d'un nombre limité d'objets. C'est ce traitement au niveau de l'objet qui permet à la perception d'être exacte, contrairement à ce qui se passe dans le domaine des grandes collections.

Ces différences de traitement permettent d'expliquer certains résultats. Ainsi, alors que les nourrissons parviennent aisément à faire abstraction des propriétés des objets pour de grandes collections, lorsqu'on leur présente un petit nombre d'objets, ils ont tendance à s'intéresser aux objets eux-mêmes — sans nécessairement prêter attention à la quantité[14]. De même, les nourrissons peuvent avoir des difficultés à passer d'un traitement de type petite quantité à un traitement de type grande quantité[15]. À l'heure actuelle, on ne sait pas exactement quand et comment ces difficultés se résorbent. Il se pourrait qu'apprendre à utiliser le pluriel et le singulier au niveau du langage aide les très jeunes enfants à créer des relations entre les représentations des petites et des grandes quantités[16].

L'apprentissage des mots-nombres

Avant même l'entrée en maternelle, les enfants sont capables de compter. Si on leur donne quelques objets avec la consigne de les compter, ils s'exécutent, récitent les nombres dans l'ordre (ou à peu près dans l'ordre), en pointant vers les objets qu'on leur a demandé de compter (pour un tableau précis de l'évolution des compétences numériques en maternelle chez des enfants français, voir l'encadré « Évolution des compétences numériques en maternelle en France »). Néanmoins, pendant longtemps, les enfants ne comprennent pas la signification de cette activité ; pour eux,

---

12 — Feigenson Lisa, Dehaene Stanislas, Spelke Elizabeth S., "Core Systems of Number", *Trends in Cognitive Sciences*, n° 8(7), p. 307-314, 2004.

13 — *Subitizing* est le terme anglo-saxon originel qui a été gardé par la quasi-totalité des chercheurs francophones. Il a cependant été traduit par « subitisation » dans quelques travaux suite à l'introduction du terme par Gréco.

14 — Feigenson Lisa, Carey Susan, "On the limits of Infants' Quantification of Small Object Arrays", *Cognition*, n° 97(3), p. 295-313, 2005.

15 — Hyde Daniel C., "Two Systems of Non-Symbolic Numerical Cognition", *Frontiers in Human Neuroscience*, n° 5, 2011.

16 — Barner David, Thalwitz Dora, Wood Justin, Yang Shu-Ju, Carey Susan, "On the Relation Between the Acquisition of Singular-Plural Morpho-Syntax and the Conceptual Distinction Between One and More Than One", *Developmental Science*, n° 10(3), p. 365-373, 2007.

il ne s'agit que d'une comptine de plus, comme « am-stram-gram »[17]. Les chercheurs se sont rendu compte de ce décalage en proposant de nouvelles situations-problèmes aux enfants : des situations dans lesquelles une demande explicite de compter n'est pas formulée, mais qui peuvent être résolues par comptage. C'est le cas, par exemple, de la tâche « donne-moi N ». Dans cette tâche, l'enfant dispose d'un certain nombre de jouets, tous identiques (par exemple des poissons). L'expérimentateur lui demande de donner un nombre d'objets particulier : « Donne-moi trois poissons. » Les nombres d'objets demandés sont accessibles aux enfants dans la mesure où ils peuvent réciter les nombres jusqu'à 3, et même au-delà. Les demandes « donne-moi un », « donne-moi deux » ou « donne-moi trois » sont correctement traitées par la moitié des élèves de 36 mois, qui est l'âge moyen d'entrée en petite section[18].

Les recherches utilisant la tâche « donne-moi N » ont montré que les enfants apprennent le sens des premiers nombres un par un et dans l'ordre. Ainsi, à quelques exceptions près, les enfants avant 30 mois ne comprennent aucun nombre : ce qu'ils donnent ne correspond pas à ce qui est demandé par l'expérimentateur, même lorsque l'expérimentateur demande « un ». Quelques mois plus tard, les enfants ont appris le sens du mot « un » : si on leur demande « un poisson », ils en donnent effectivement un, et, pour toute autre demande, ils donnent un nombre de poissons au hasard, mais supérieur à un. Ensuite, entre 3 ans et 3 ans et demi en général, les enfants apprennent le mot « deux » : ils peuvent alors donner un ou deux objets, mais pas trois ni plus. Puis, le plus souvent entre 3 ans et demi et 4 ans, viennent tour à tour les mots « trois » et « quatre » ; et c'est alors que se met en place un apprentissage majeur. Lorsque l'enfant est capable de donner « cinq », il devient capable de donner les quantités qui se trouvent dans sa liste de comptage, et, contrairement aux enfants plus jeunes, il utilise spontanément le comptage pour produire un certain nombre d'objets. À ce moment-là, l'enfant a compris un aspect essentiel du comptage : le fait que le dernier mot énoncé représente le nombre d'éléments de l'ensemble (le « principe de cardinalité »). Pour les enfants qui ont effectué cet apprentissage, on parle de comptage-énumération pour distinguer cette étape de celle du comptage-récitation.

Cette étape d'entrée dans l'énumération est fondamentale. Il a été montré, par exemple, que les apprentissages ultérieurs en mathématiques dépendent non de l'âge biologique, mais de l'âge auquel l'enfant a réussi à entrer dans l'énumération[19]. D'autres recherches se sont efforcées de déterminer quelles compétences dépendent de cette étape. C'est le cas, par exemple, de la compréhension du rapport entre les mots-nombres et la correspondance un à un. Ainsi, lorsqu'on demande aux enfants de reproduire une collection, les plus jeunes reproduisent les quantités de manière approximative, et seuls les enfants qui sont entrés dans l'énumération s'appliquent

17 — Carey Susan, "Bootstrapping & the Origin of Concepts", *Daedalus*, n° 133(1), p. 59-68, 2004.

18 — Sarnecka Barbara W., Goldman Meghan C., Slusser Emily B., "How Counting Leads to Children's First Representations of Exact, Large Numbers." in Kadosh R. C., Dowker A. (Eds.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*, p. 291-309, Oxford University Press, 2015.

19 — Geary David C., vanMarle Kristy, Chu Felicia W., Rouder Jeffrey, Hoard Mary K., Nugent Lara, "Early Conceptual Understanding of Cardinality Predicts Superior School-Entry Number-System Knowledge", *Psychological Science*, n° 29(2), p. 191-205, 2017.

à aligner leurs objets avec ceux du modèle[20]. De même, seuls les enfants qui comprennent le comptage-énumération sont capables de juger que, si on place deux collections l'une en face de l'autre en situation de correspondance un à un, ces deux collections correspondent au même mot-nombre[21].

Il paraît donc important d'accompagner les enfants pour qu'ils parviennent à entrer dans l'énumération au plus tôt. Mais comment faire ? À notre connaissance, aucune recherche n'a encore à ce jour réussi à prouver l'efficacité d'une méthode d'enseignement[22]. Il reste néanmoins certain que la scolarisation et la richesse de l'environnement dans lequel les enfants grandissent ont un effet déterminant sur leur entrée dans l'énumération. Aux États-Unis, par exemple, on constate un écart de près de deux ans sur cet apprentissage entre les enfants des milieux très défavorisés (qui n'ont pas accès à l'école maternelle, payante) et les enfants des milieux aisés, scolarisés[23]. Sans que l'on sache exactement quelles sont, parmi les activités réalisées dans le cadre scolaire, celles qui sont les plus efficaces, l'école maternelle joue un rôle essentiel pour permettre aux enfants d'entrer dans le comptage, et donc dans la compréhension du nombre.

---

20 — Schneider Rose M., Brockbank Erik, Feiman Roman, Barner David, "Counting and the Ontogenetic Origins of Exact Equality", *Cognition*, n° 218, 2022.

21 — Sarnecka Barbara W., Gelman Susan A., "Six Does Not Just Mean a Lot : Preschoolers See Number Words as Specific", *Cognition*, n° 92(3), p. 329-352, 2004.

22 — Pour quelques exemples d'études à ce sujet, voir : Gunderson Elizabeth A., Spaepen Elizabet, Levine Susan C., "Approximate Number Word Knowledge Before the Cardinal Principle", *Journal of Experimental Child Psychology*, n° 130, p. 35-55, 2015 ;
Carey Susan, Shusterman Anna, Haward Paul, Distefano Rebecca, "Do Analog Number Representations Underlie the Meanings of Young Children's Verbal Numerals?", *Cognition*, n° 168, p. 243-255, 2017 ;
Hyde Daniel C., Mou Yi, Berteletti Ilaria, Spelke Elizabeth S., Dehaene Stanislas, Piazza Manuela, "Testing the Role of Symbols in Preschool Numeracy: An Experimental Computer-Based Intervention Study", *PLoS ONE*, n° 16(11), e0259775, 2021.

23 — Sarnecka Barbara W., Negen James, Goldman Meghan C., "Chapter 9 - Early Number Knowledge in Dual-Language Learners From Low-SES Households" in Berch Daniel B., Geary David C., Mann Koepke Kathleen (Eds.), *Language and Culture in Mathematical Cognition*, p. 197-227, Academic Press, 2018.

PEUT-ON COMPRENDRE LES NOMBRES SI ON NE DISPOSE PAS DE MOTS POUR LES NOMMER ?

Des recherches[24] se sont intéressées à différentes populations, dont des personnes nées sourdes n'ayant pas bénéficié d'une scolarisation ni d'un environnement en langue des signes. Ces recherches arrivent toutes au même résultat : les personnes interrogées parviennent à manipuler des quantités approximatives, même si elles ne disposent pas de mots pour nommer ces quantités. En revanche, elles ne parviennent pas à résoudre des exercices portant sur les quantités exactes.

Plusieurs hypothèses peuvent être émises. Il se peut que le langage joue un rôle fondamental pour accéder à certains concepts. Ainsi, peut-être est-il nécessaire de disposer de mots-nombres et d'une procédure de comptage pour parvenir à comprendre l'idée que les nombres sont des quantités exactes, définies à l'unité près. En effet, si on a un grand nombre de graines et qu'on ajoute ne serait-ce qu'une seule graine, alors le nombre change — mais comme ce changement n'est pas perceptible, peut-être est-il difficile à saisir. Si cette hypothèse sur le rôle du langage est juste, alors les enfants de maternelle pourraient, eux aussi, avoir besoin d'apprendre cette notion de nombre exact, différente de la notion de nombre approximatif, innée.

Néanmoins, on peut également proposer une deuxième hypothèse pour expliquer les résultats décrits ci-dessus. Selon cette deuxième hypothèse, le langage jouerait un rôle moins important : l'idée que les nombres peuvent être définis de manière exacte serait accessible à tous les êtres humains, de manière spontanée, quelle que soit leur culture et la langue qu'ils parlent ; et le langage et le comptage seraient simplement des outils utiles pour résoudre certaines tâches. En d'autres termes, et pour reprendre l'exemple de la manipulation de graines évoqué ci-dessus, on peut tout à fait imaginer que des personnes savent qu'il existe une réponse exacte à la question posée, mais qu'elles n'ont pas les moyens de parvenir à cette réponse en l'absence d'une procédure de comptage. Si cette deuxième hypothèse est juste, alors l'obstacle rencontré par les enfants de maternelle est de nature différente : ils posséderaient bien le concept de nombre exact, sans toutefois pouvoir articuler les outils propres à leur culture (comptage, mots et symboles pour les nombres) avec ce concept.

24 — Pica Pierre, Lemer Cathy, Izard Véronique, Dehaene Stanislas, "Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group", *Science*, n° 306(5695), p. 499-503, 2004.
Frank Michael C., Everett Daniel L., Fedorenko Evelina, Gibson Eward, "Number as a Cognitive Technology: Evidence from Pirahã Language and Cognition", *Cognition*, n° 108(3), p. 819-824, 2008.
Spaepen Elizabet, Coppola Marie, Spelke Elizabeth S., Carey Susan E., Goldin-Meadow Susan, "Number Without a Language Model", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n° 108(8), p. 3163-3168, 2011.

Le comptage sur les doigts

L'utilisation des doigts pour compter et pour calculer apparaît être un outil efficace de résolution de petites opérations en maternelle[25]. Lorsque l'enfant représente une collection d'objets sur ses doigts, il effectue un premier pas vers l'abstraction puisqu'il admet qu'une même quantité peut être représentée par différents moyens[26]. Une collection de trois petites voitures peut ainsi être représentée par trois doigts levés. La configuration de doigts levés a d'ailleurs elle-même un double statut, analogique et symbolique. Chacune des trois petites voitures est représentée par chacun des trois doigts levés, d'où le caractère analogique de la collection de doigts. Cependant, ces trois doigts levés constituent aussi un symbole puisque la configuration de doigts levés est déterminée culturellement. En effet, alors que nos voisins britanniques lèvent l'annulaire, le majeur et l'index pour représenter trois, les Français lèvent plutôt le pouce, l'index et le majeur. Ces codes culturels permettent une lecture directe du nombre représenté sans nécessiter de comptage des doigts[27]. Les doigts pourraient donc constituer un outil de transition entre des codes analogiques de représentation des quantités et les codes purement symboliques que constituent les mots-nombres et les chiffres arabes[28].

Le calcul sur les doigts constitue également un outil qui pourrait permettre aux enfants de se détacher de supports matériels pour résoudre des opérations mentalement[29].

---

25 — Thevenot Catherine, « Le comptage sur les doigts pour la résolution de problèmes arithmétiques : avancée des connaissances », *ANAE* (*Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*), n° 180, p. 555-562, 2022.
Dupont-Boime Justine, Thevenot Catherine, "High Working Memory Capacity Favours the Use of Finger Counting in Six-Year-Old Children", *Journal of Cognitive Psychology*, n° 30, p. 35-42, 2018.

26 — Sinclair Nathalie, Pimm David John, "Mathematics Using Multiple Senses: Developing Finger Gnosis with Three- and Four-Year-Olds in an Era of Multi-Touch Technologies", *Asia-Pacific Journal of Research in Early Childhood Education*, n° 9(3), p. 99-110, 2015.

27 — Thevenot Catherine, « La relation entre doigts et nombres : que peuvent nous apprendre les enfants présentant une hémiplégie ? », *ANAE* (*Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*), n° 128, p. 47-52, 2014.
Thevenot Catherine, Castel Caroline, Danjon Juliette, Renaud Olivier, Ballaz Cécile, Baggioni Laetitia, Fluss Joël, "Numerical Abilities in Children with Congenital Hemiplegia: an Investigation of the Role of Finger Use in Number Processing", *Developmental Neuropsychology*, n° 39, p. 88-100, 2014.

28 — Fayol Michel, Seron Xavier, "About Numerical Representations: Insight from Neuropsychological, Experimental, and Developmental Studies" in Campbell Jamie I. D. (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition*, p. 3-22, Psychology Press, New York and Hove, 2005.
Andres Michael, Di Luca Samuel, Pesenti Mauro, "Finger-Counting: the Missing Tool?", *Behavioral & Brain Sciences*, n° 31, p. 642-643, 2008.

29 — Baroody Arthur J., "The Development of Counting Strategies for Single-Digit Addition", *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 18, p. 141-157, 1987.
Poletti Céline, Krenger Marie, Dupont-Boime Justine, Thevenot Catherine, "Evolution of Finger Counting Between Kindergarten and Grade 2", *Children*, n° 9(2), p. 132, 2022.

Dans un premier stade développemental, les enfants modélisent les deux quantités d'un problème sur leurs doigts avant de les rassembler. Par exemple, pour 4 + 3, les enfants lèvent quatre doigts sur une main, trois sur l'autre, et dénombrent un par un tous les doigts levés à partir de un. Cette étape de modélisation est potentiellement suivie d'une étape de transition au cours de laquelle les enfants lèvent les doigts pour modéliser le premier terme d'une addition[30] et poursuivent leur processus d'énumération tout en représentant le deuxième terme de l'addition sur leurs doigts. Ainsi, pour 4 + 3, l'enfant lève quatre doigts sur une main pour 4 puis continue dans un processus unique d'énumération, cinq, six, sept, tout en levant successivement un doigt, deux doigts puis trois doigts sur l'autre main. Cette étape pourrait permettre à l'enfant de se diriger vers une stratégie de surcomptage, consistant en la représentation mentale d'un opérande à partir duquel le deuxième terme de l'addition est ajouté (quatre dans la tête puis cinq, six, et sept sur trois doigts levés consécutivement dans notre exemple). L'enfant qui conçoit qu'un terme de l'addition peut être représenté purement mentalement pourrait ainsi concevoir que deux termes de l'addition peuvent être représentés mentalement et ainsi se défaire de la nécessité de supports externes pour accomplir ses calculs[31].

L'apprentissage des chiffres

Lorsque l'enfant s'affranchit de la nécessité d'aides externes comme des objets manipulables ou ses doigts, il doit donc se servir de symboles sous la forme de mots-nombres ou de chiffres écrits pour traduire mentalement les quantités concrètes. Il a été montré qu'à l'âge de cinq ans, les enfants sont capables de traduire (*i.e.* transcoder) des quantités représentées sous forme analogique (collections de points) en mots-nombres et chiffres arabes ainsi que de transcoder des mots-nombres en chiffres arabes. À quatre ans cependant, alors que le transcodage de points en symboles est en général réalisé relativement aisément par les enfants, ils éprouvent encore des difficultés pour transcoder les mots-nombres en chiffres arabes. Finalement, les chercheurs concluent que les enfants devraient tout d'abord apprendre à associer des mots-nombres à des collections d'objets, puis devraient associer des nombres écrits en chiffres à ces mêmes collections avant d'apprendre la correspondance entre mots-nombres et nombres écrits en chiffres[32]. Pour les aider à faire ces associations, ou en d'autres termes pour que les codes symboliques se greffent correctement sur les représentations non symboliques et qu'enfin les deux codes symboliques s'associent l'un à l'autre, des activités dans lesquelles les nombres sont représentés dans les

30 — En mathématiques, dans une expression décrivant une opération, chacun des éléments sur lesquels s'applique l'opération est appelé un opérande ou, en français plus courant, le terme de l'opération.

31 — Baroody Arthur J., “The Development of Counting Strategies for Single-Digit Addition”, *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 18, p. 141-157, 1987.

32 — Benoit Laurent, Lehalle Henri, Molina Michèle, Tijus Charles, Jouen François, “Young Children's Mapping Between Arrays, Number Words, and Digits”, *Cognition*, n° 129(1), p. 95-101, 2013.

trois formats sont très utiles[33]. Comme développé plus loin dans une sous-partie spécifique, les jeux de plateau, tels que le jeu de l'oie, le jeu serpents et échelles, ou bien d'autres types de jeux dans lesquels les enfants doivent compter le nombre de points sur des dés ou associer des quantités d'objets aux nombres de points sur les dés, s'avèrent très appropriés et peuvent être facilement adaptés à cette fin. Ces jeux impliquent également très souvent de déplacer son pion d'un certain nombre de cases sur le plateau et l'enfant peut ainsi articuler les propriétés cardinales et ordinales des nombres. Plus généralement, des activités et jeux dans lesquels les trois codes, verbal, visuel et analogique[34], sont mis en correspondance facilitent leurs articulations et, *in fine*, permettent aux enfants de construire et consolider le sens du nombre[35].

PROGRESSION DES COMPÉTENCES NUMÉRIQUES EN MATERNELLE EN FRANCE

Des recherches menées récemment en France[36] ont mesuré les performances des enfants dans différentes épreuves numériques. Cela permet de dresser un tableau de l'évolution des compétences au cours des trois années d'école maternelle.

Les résultats présentés ci-après sont des résultats moyens et ne font donc pas apparaître les grandes différences qui existent entre les enfants. Ces différences peuvent notamment s'expliquer par les activités numériques que l'enfant pratique ou non à la maison, et par les activités qui sont privilégiées par l'enseignant en classe.

33 — Pour un exemple avec un jeu de domino, voir Brankaer Carmen, Ghesquière Pol, De Smedt Bert, "The Effect of a Numerical Domino Game on Numerical Magnitude Processing in Children With Mild Intellectual Disabilities", *Mind, Brain, and Education*, n° 9(1), p.29-39, 2015.

34 — Dehaene Stanislas, "Varieties of Numerical Abilities", *Cognition*, n° 44, p. 1-42, 1992.

35 — *Ibid*, p. 21, note 3.

36 — Courtier Philippine, Gardes Marie-Line, Van der Henst Jean-Baptiste, Noveck Ira A., Croset Marie-Caroline, Epinat-Duclos Justine, Léone Jessica, Prado Jérôme, "Effects of Montessori Education on the Academic, Cognitive and Social Development of Disadvantaged Preschoolers: A Randomized Controlled Study in the French Public-School System", *Child Development*, n° 92(5), p. 2069-2088, 2021.
Darnon Céline, Fayol Michel, "Can an Early Mathematical Intervention Boost the Progress of Children in Kindergarten? A Field Experiment", *European Journal of Psychology of Education*, n° 37, p. 1-18, 2021.
Girard Cléa, Longo Léa, Chesnokova Hanna, Epinat-Duclos Justine, Prado Jérôme, "To What Extent Do Home Numeracy Practices and Parental Number Talk Relate to Children's Math Skills? A Pre-Registered Study in 5-Year-Old Children", *Learning and Individual Differences*, n° 106, 2023.
Mazens Karine, Croset Marie-Caroline, « Développement et influence du SES sur différentes compétences mathématiques des enfants à l'école maternelle française », Symposium, Piaget-RIPSYDEVE, 26-27 juin, Genève, Suisse, 2023.
Thomas Aude, Tazouti Youssef, Hoareau Lara, Luxembourger Christophe, Hubert Blandine, Jarlégan Annette, "Early Numeracy Assessment in French Preschool: Structural Analysis and Links With Children's Characteristics", *International Journal of Early Years Education*, 2021.

	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans ou lorsque les compétences précédentes sont acquises	À partir de 5 ans ou lorsque les compétences précédentes sont acquises
Récitation de la comptine numérique	Peut être connue entre 0 et 10.	Peut être connue entre 15 et 30.	Peut être connue entre 20 et 40.
Nombres écrits en chiffres	La moitié des enfants en acquiert la lecture jusqu'à 5.	La lecture est bien acquise jusqu'à 5 et environ la moitié des enfants lit les nombres jusqu'à 10.	La lecture est aisée jusqu'à 10 et environ la moitié des enfants lit les nombres jusqu'à 30.
Déterminer et exprimer la cardinalité d'un ensemble[37]	Environ la moitié des enfants réussit jusqu'à 7-8.	Les enfants y parviennent jusqu'à 7-8.	Taux de réussite élevé.
« **Donne-moi N** »	Les enfants y parviennent jusqu'à 3-4.	La moitié des enfants y parvient jusqu'à 8-9.	Presque tous les enfants y parviennent jusqu'à 10.
Calcul mental		Les enfants commencent à pouvoir trouver un résultat, à condition que les nombres soient tout petits et qu'on utilise la formulation « et encore » (exemple : « deux et encore un, c'est égal à combien ? »).	Plus de la moitié des enfants répond correctement avec la formulation « plus », là aussi à condition qu'il s'agisse de petits nombres.

37 — Cette situation est adaptée à la transition grande section-CP, en ce qu'elle amorce le passage du dénombrement au calcul.

Comment favoriser les apprentissages numériques ?

Greffer les symboles sur les intuitions de quantité

Les intuitions des enfants sur les quantités, présentes dès la naissance, constituent un socle sur lequel l'apprentissage des mathématiques peut s'appuyer. Ces intuitions sont sollicitées lorsque l'on utilise des nombres, même à l'âge adulte[38]. Ainsi, chez l'être humain, les compétences numériques ne font jamais abstraction complète de la capacité que nous avons à percevoir et manipuler des ensembles concrets. Certaines opérations arithmétiques reposent fondamentalement sur ces capacités – comme la soustraction, que l'on n'apprend pas sous forme de table, et que l'on résout habituellement en manipulant mentalement des quantités.

Il paraît donc important de renforcer ces intuitions sur les quantités, afin de permettre aux enfants de construire leurs habiletés mathématiques sur un socle solide. Néanmoins, cela n'est pas suffisant, comme l'illustre une recherche menée récemment en Inde par une équipe de chercheurs internationale sur un très grand échantillon d'enfants[39]. Les chercheurs ont travaillé avec une association qui offre des cours à des enfants des rues, avant qu'ils n'entrent dans la scolarité obligatoire (équivalent CP). Au cours de ces séances, les enfants jouent à des jeux numériques portant uniquement sur des ensembles concrets. Ils doivent, par exemple, comparer des ensembles de points, ou déplacer un pion de 1, 2, ou 3 cases sur un plateau après avoir tiré une carte qui montre 1, 2 ou 3 points. Les résultats ont montré que ces activités avaient des effets bénéfiques sur la perception des quantités, par rapport à un groupe contrôle qui jouait à des jeux non numériques. Cependant, ces effets s'estompent assez rapidement et ne donnent pas lieu à de meilleurs résultats en mathématiques en CP.

Ainsi, si la manipulation de quantités peut aider les enfants à asseoir leurs apprentissages sur un socle intuitif solide, il semble nécessaire de travailler également le lien entre les quantités et les symboles (mots-nombres, chiffres) dès le plus jeune âge. Pour aller dans ce sens, quelques résultats de recherche récents montrent que les enfants qui comprennent le mieux les symboles numériques font preuve, quelques mois plus tard, d'une meilleure perception des quantités[40] : apprendre à manipuler des symboles numériques aiderait donc les enfants à affiner leur perception des quantités numériques et leurs intuitions sur les quantités.

---

38 — Dehaene Stanislas, *La Bosse des maths*, Odile Jacob, Paris, 1997.

39 — Dillon Moira R., Kannan Harini, Dean Joshua T., Spelke Elizabeth S., Duflo Esther, "Cognitive Science in the Field: A Preschool Intervention Durably Enhances Intuitive but not Formal Mathematics", *Science*, n° 357(6346), p. 47-55, 2017.

40 — Mou Yi, Zhang Bo, Hyde Daniel C., "Directionality in the Interrelations Between Approximate Number, Verbal Number, and Mathematics in Preschool-Aged Children", *Child Development*, n° 94(2), p. 67-84, 2022.

Apprendre en s'exerçant pour développer des automatismes

Il est très important que les élèves répètent souvent les mêmes activités afin d'automatiser leurs réflexions et comportements. Cette automatisation des premières activités numériques permettra aux élèves d'utiliser cette base pour entrer dans des activités de plus en plus complexes. Les activités automatisées sont en effet conduites sans que les élèves aient à déployer de grands efforts cognitifs pour les mener à terme. Les ressources cognitives ainsi libérées peuvent être allouées à des activités de plus haut niveau. Par exemple, les élèves qui doivent dénombrer une collection d'objets seront ralentis et gênés dans cette activité s'ils n'ont pas encore automatisé la production des premiers mots-nombres de la chaîne numérique verbale. Plus l'élève parvient à convoquer facilement et rapidement cette séquence numérique, plus il pourra consacrer de ressources cognitives à l'activité de dénombrement. Un élève peut avoir mémorisé une information sans que sa trace ne soit assez forte pour être récupérée facilement. Ainsi, plus la comptine numérique sera répétée et travaillée en classe, plus la probabilité d'une récupération automatique, sans effort, sera grande.

La récupération d'information en mémoire n'est pas le seul automatisme permettant aux élèves d'économiser des efforts cognitifs. Certaines procédures peuvent aussi être automatisées. La répétition de l'activité sera aussi la clef pour cette automatisation, mais le but de l'enseignant sera de faire exécuter une action ou une séquence d'actions sans que l'élève ait à mobiliser de coûteuses ressources cognitives. Ici, l'élève ne récupérera pas une connaissance spécifique en mémoire, mais une procédure abstraite d'exécution ou de résolution pouvant s'appliquer à divers contenus. Par exemple, lorsque l'élève doit effectuer une addition simple en maternelle, on peut lui apprendre à représenter les termes de l'addition sur chacune des mains avant de dénombrer ses doigts un par un. Un entraînement à cette stratégie, pendant six séances réparties sur deux semaines, a permis à des élèves de cinq ans d'améliorer leurs performances en addition de manière significative[41]. L'entraînement quotidien permet aux élèves de reconnaître les problèmes qui peuvent être résolus grâce à une procédure rapide et efficace car automatisée.

Favoriser l'apprentissage des nombres grâce aux jeux

De façon générale, le jeu occupe une place très importante dans la vie de l'enfant. Pour favoriser l'acquisition du nombre, il est donc important d'utiliser les jeux comme support. Notons d'emblée que les jeux auxquels les élèves de maternelle s'adonnent spontanément sont plutôt des jeux symboliques, de « faire semblant », ou encore des

41 — Poletti Céline, Krenger Marie, Letang Marie, Thevenot Catherine, "Explicit Teaching of Finger Counting in Kindergarteners", conférence du 63e Psychonomic Society Annual Meeting, Boston, États-Unis, 19 novembre 2022.

jeux de motricité. L'enseignant peut proposer des jeux dits de société ou jeux à règles, à condition que celles-ci soient accessibles. Notons également que si le jeu est une source de motivation importante chez l'enfant, cette modalité ne sera efficace que si elle remplit certaines conditions, notamment celle de s'inscrire dans une séquence choisie par l'enseignant, avec un objectif d'apprentissage ou de réinvestissement déterminé.

Peu de jeux ont réellement donné lieu à une évaluation quant à leur efficacité, mais on peut supposer que les jeux faisant appel à différentes représentations des nombres permettent de renforcer les capacités de l'enfant à passer d'un code à un autre (exemple : constater combien il y a d'objets par un mot-nombre, lire à voix haute un nombre écrit en chiffres, reconnaître les constellations d'un dé, etc.).

Un jeu de plateau dérivé du classique jeu de l'oie a donné lieu à de multiples travaux d'évaluation[42]. S'appuyant sur les données de psychologie cognitive mettant en évidence un lien entre la qualité de la représentation de la ligne numérique mentale (cf. encadré) et la réussite en mathématiques chez les enfants[43], Siegler a étudié les conditions dans lesquelles un jeu adapté pouvait améliorer la précision de la ligne numérique mentale, mais aussi d'autres compétences numériques telles que le comptage, la comparaison de nombres, l'identification de nombres, l'arithmétique. L'entraînement proposé par Siegler utilise un jeu de plateau linéaire (plutôt que circulaire), avec les nombres orientés de gauche à droite. L'étendue des nombres et les valeurs du dé sont choisies en fonction de l'âge des enfants (par exemple, pour des enfants âgés de quatre ans, on choisira une ligne de 0 à 10 et les valeurs 1 et 2 pour le dé). Ce jeu exige également que l'élève lise à voix haute les nombres sur lesquels il passe avec son pion, et pas seulement les nombres du dé, comme c'est le cas dans le jeu de l'oie. Ce jeu est efficace parce que son support matériel, qui représente les grandeurs des nombres, offre une analogie directe avec la ligne numérique mentale orientée horizontalement de gauche à droite. Les relations linéaires entre les grandeurs numériques et les indices kinesthésiques, auditifs, visuo-spatiaux et temporels impliqués au cours du jeu, fournissent une large base multimodale pour une représentation linéaire des grandeurs numériques. Le nombre de mouvements avec le pion, le nombre de mots-nombres récités, la distance parcourue, etc., sont en lien avec la grandeur des nombres. On peut également ajouter que ce jeu fait travailler à la fois l'aspect ordinal des nombres, puisque les nombres sont ordonnés sur le plateau, et l'aspect cardinal, puisque les quantités totales sont présentées sur les constellations du dé (exemple : trois points sur le dé correspondent au mot-nombre « trois » et représentent trois cases sur le plateau).

---

42 — Siegler Robert S., "Magnitude Knowledge: The Common Core of Numerical Development", *Developmental Science*, n° 19(3), p. 341-361, 2016.

43 — Pour une étude menée en France, voir Gimbert Fanny, Camos Valérie, Gentaz Eduard, Mazens Karine, "What Predicts Mathematics Achievement? Developmental Change in 5-and 7-Year-Old Children", *Journal of Experimental Child Psychology*, n° 178, p. 104-120, 2019.

QU'EST-CE QUE LA LIGNE NUMÉRIQUE MENTALE ?

De nombreux travaux, d'abord menés chez l'adulte, ont mis en évidence que les nombres symboliques activent une représentation spatiale de la quantité sous la forme d'une ligne numérique mentale. Cette ligne est orientée de gauche à droite, avec les petits nombres associés au côté gauche du corps et les grands nombres associés au côté droit. Cette ligne se caractérise également par une compression des grands nombres (plus les nombres sont grands, plus l'espace entre deux nombres consécutifs est petit dans notre représentation).

Pour étudier la qualité de la représentation de la ligne numérique mentale chez l'enfant, Siegler a proposé une épreuve dans laquelle on demande aux enfants de positionner un nombre sur une ligne numérique bornée. Par exemple, sur une ligne comprenant les bornes 0 et 100 et aucune graduation intermédiaire, l'enfant doit placer le nombre 36 en indiquant sa réponse par un trait sur la ligne. La réponse de l'enfant est alors comparée à la position exacte du nombre sur la ligne. Les réponses obtenues montrent que l'on observe une représentation logarithmique de la quantité numérique chez l'enfant, c'est-à-dire que les petits nombres sont plus espacés que les grands nombres. Cela rejoint la compression des grands nombres évoquée ci-dessus. Les résultats indiquent également qu'il existe des progrès importants avec l'âge se traduisant par le passage d'une représentation logarithmique à une représentation linéaire, d'abord pour les nombres de 0 à 10 chez les enfants de quatre ans, puis pour les nombres de 0 à 100 chez les enfants de six ans et les nombres de 0 à 1 000 chez les enfants entre huit et dix ans. Ainsi, l'enfant va progressivement représenter la magnitude des nombres avec le même espace entre deux nombres consécutifs (n et n + 1), quels que soient ces nombres.

Favoriser la réflexion

À partir de la réponse exacte d'un enfant à une question, il est parfois difficile de déterminer quel est réellement son niveau de compréhension. C'est le cas, par exemple, pour les activités de dénombrement qui peuvent être beaucoup pratiquées à l'école et à la maison, et pour lesquelles l'enfant pourrait répéter par imitation des procédures observées, mais sans en comprendre les principes sous-jacents[44].

Amener l'enfant à réfléchir en maternelle pourrait se traduire par lui proposer des activités dans lesquelles il doit prédire un résultat sans pouvoir, dans un premier temps, avoir recours à une résolution empirique, ou encore lui proposer des activités dans lesquelles il ne peut pas transférer directement une procédure apprise. C'est le cas, par exemple, des activités de dénombrement qui peuvent s'insérer dans des

44 — Voir le débat entre la compréhension des principes en premier (Gelman Rochel, Gallistel Charles Ransom, *The Child's Understanding of Number*, Cambridge, MA : Harvard University Press, 1978) ou l'imitation de procédures en premier (Briars Diane, Siegler Robert S., "A Featural Analysis of Preschoolers' Counting Knowledge", *Developmental Psychology*, n° 20(4), p. 607-618, 1984).

activités de résolution de problèmes et ainsi favoriser la réflexion et la compréhension du sens du comptage.

Dans une étude de Zur et Gelman[45], les enfants sont incités à prédire un résultat avant de le vérifier par le comptage. À partir d'un petit problème verbal présenté avec un support matériel (exemple : des croissants vendus par un boulanger, des pommes sur un arbre), les enfants doivent d'abord prédire le résultat d'une transformation (ajout ou soustraction), puis vérifier leur prédiction par le comptage. Même si les prédictions des enfants ne correspondent pas toujours à la cardinalité exacte, les résultats indiquent que, dès 3-4 ans, leurs réponses vont dans le sens de la transformation : ils proposent un nombre plus grand lorsqu'on ajoute et un nombre plus petit lorsqu'on retire un ou plusieurs objets. En résolvant ce type de problèmes, les enfants ont recours au dénombrement pour répondre à un objectif qui a du sens et ne répètent pas seulement une procédure apprise.

Pour résumer, les théories et les résultats des recherches en psychologie cognitive convergent vers l'idée que l'enfant doit, au cours de son développement et de son cursus scolaire, apprendre à donner du sens au nombre. En d'autres termes, il doit apprendre à considérer les symboles numériques comme porteurs de magnitudes et non comme une simple suite ordonnée de symboles. À cette fin, la mobilisation régulière des quatre modalités d'apprentissage à la maternelle (le jeu, la réflexion, l'exercice et la mémorisation), de façon complémentaire, concomitante ou alternée, répond à ces objectifs.

45 — Zur Osnat, Gelman Rochel, "Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking", *Early Childhood Research Quaterly*, n° 19, p. 121-137, 2004.

En résumé

- Les enfants possèdent des intuitions très précoces sur les quantités. Ces intuitions leur permettent de comparer des quantités et d'effectuer des calculs sur des quantités approximatives.
- Au cours des années de l'école maternelle, les enfants apprennent à réciter la comptine numérique.
- Les enfants apprennent peu à peu le sens des mots « un », « deux », « trois », puis « quatre ».
- Ils passent ensuite par une étape importante, lorsqu'ils comprennent que le comptage permet de déterminer le nombre d'objets dans une collection (comptage-énumération).
- On retrouve les mêmes étapes lors de l'apprentissage des chiffres.
- Ainsi, pour développer leur sens du nombre, les enfants doivent parvenir à greffer des symboles (mots-nombres, nombres écrits en chiffres) sur leurs représentations des quantités.
- Les stratégies de comptage sur les doigts permettent aux enfants d'entrer dans le calcul. Ces stratégies deviennent de plus en plus élaborées et abstraites au fur et à mesure des apprentissages.
- Les jeux de plateau et autres jeux de société sont des outils privilégiés pour l'apprentissage du nombre en maternelle.

II

Apports de la recherche en didactique sur les premiers apprentissages numériques

La recherche en didactique a produit des concepts et des méthodes qui aident à concevoir et à analyser les situations d'enseignement, en tenant compte à la fois des tâches proposées aux élèves, de leurs activités en classe et des interventions des enseignants pour initier ces activités, les réguler, et expliciter les connaissances à acquérir. Les deux premières sections proposent une synthèse théorique sur deux apports de la recherche en didactique des mathématiques pour les apprentissages numériques à l'école maternelle, et les quatre suivantes, des analyses de situations révélatrices de la richesse du travail à mener par l'enseignant pour que les élèves parviennent à construire les apprentissages visés. Ces quatre sections comportent des encadrés visant à illustrer les concepts présentés dans les sections théoriques.

L'enseignement des mathématiques à l'école maternelle est spécifique. L'activité des élèves est très dépendante de la formulation des questions et consignes, des matériels, etc. Les écarts d'âge, même minimes, correspondent à des différences importantes de développement psychologique et moteur. En dehors de l'école, les enfants sont, en outre, exposés de manière très différente aux savoirs mathématiques.

Situations pour mettre les élèves en activité d'apprentissage

Les savoirs mathématiques enseignés à l'école primaire sont avant tout des outils pour résoudre des problèmes. Dans la suite de leur scolarité, les élèves apprendront que ces savoirs sont également des objets théoriques organisés[46]. L'hypothèse fondamentale de la didactique des mathématiques est que les situations d'enseignement doivent faire acquérir des connaissances aux élèves pour résoudre efficacement des problèmes. Brousseau a conçu une « théorie des situations didactiques » dans laquelle

46 — Douady Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 7(2), p. 5-32, 1986.

chaque situation a un rôle spécifique dans cette construction de connaissances[47]. Des ouvrages destinés à l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle proposent de telles situations[48].

Cinq situations distinguées par Brousseau pour l'enseignement des concepts mathématiques à l'école maternelle

— **La dévolution** : le professeur conduit les élèves à s'approprier la tâche et à s'engager dans sa réalisation. Pour cela, il les familiarise avec le matériel à utiliser, il leur fait comprendre les contraintes à respecter et leur précise les critères de réussite. Il n'hésite pas à les faire travailler collectivement sur un exemple pour s'assurer qu'ils se sont bien approprié ces éléments, ni à les rappeler si besoin.
— **La situation d'action** : les élèves cherchent à réaliser la tâche proposée par le professeur. Ils se confrontent aux contraintes et critères de réussite explicités lors de la dévolution. Si nécessaire, ils adaptent leurs procédures au fil des essais, montrant ainsi qu'ils se sont bien approprié ces contraintes et ces critères. Le professeur supervise leur travail et les encourage. Autant que nécessaire, il réexplique l'objectif, les contraintes et les critères de réussite (retour à la dévolution).
— **La situation de formulation** : la tâche exige que l'élève communique oralement ou par écrit. Il doit, par exemple, demander à un autre élève d'aller chercher juste ce qu'il faut de bouchons pour fermer toutes les bouteilles. Ce n'est alors pas seulement le nombre qui est mobilisé, mais aussi sa désignation orale ou écrite. L'élève apprend ainsi à les mettre en lien. Lorsque l'élève écrit le nombre de bouchons souhaités, il apprend aussi que l'écrit a une fonction de communication. Ce n'est pas seulement un entraînement au geste graphique.
— **La situation de validation** : le professeur conduit les élèves à établir (ou à réfuter) la validité des procédures mises en œuvre, c'est-à-dire que les contraintes sont respectées et que les critères de réussite sont satisfaits.
— **L'institutionnalisation** : le professeur dégage la généralité des procédures rencontrées en classe. Il conduit les élèves à apprendre que des procédures utilisées pour résoudre un problème pourront encore être utilisées pour résoudre d'autres problèmes analogues.

47 — Brousseau Guy, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1998.

48 — Par exemple : Hersant Magali, Thomas Yves, *Maths à grand pas*, Retz, Paris, 2019 ; Margolinas Claire, Wozniak Floriane, *Le Nombre à l'école maternelle, une approche didactique*, De Boeck, Bruxelles, 2012.

Le rôle du professeur dans la mise en œuvre de ces situations

Les cinq situations décrites précédemment contribuent à l'apprentissage mathématique des élèves, mais également à l'apprentissage de la conduite à adopter pour apprendre en mathématiques : agir pour atteindre l'objectif défini par la question ou la consigne, dire comment on a procédé, comprendre pourquoi on a réussi ou non, écouter les autres, et enfin savoir qu'il y a des connaissances à en apprendre qui pourront être réutilisées dans d'autres problèmes.

Dans ces cinq situations, comme l'explique Hersant, le rôle du professeur est majeur[49]. Il est attentif à la pertinence des conditions qu'il met en place (aspects matériels, consigne, etc.) au regard de ce qu'il souhaite que les élèves apprennent[50]. Il les encourage et les sécurise : il valorise les essais, il rassure parce que, parfois, plusieurs essais sont nécessaires. Il leur fait comprendre, enfin, qu'il ne s'agit pas de faire pour faire plaisir, mais d'agir pour apprendre.

Broccolichi et Roditi montrent que les enseignants atténuent parfois leurs exigences quant aux savoirs à acquérir afin de préserver la qualité de leurs relations avec les élèves[51]. Allard et Mamede révèlent que la volonté de rendre ludiques les situations d'apprentissage se réalise parfois au détriment des enjeux de savoirs : des situations trop simples pouvant provoquer l'ennui, des situations trop difficiles pouvant créer un sentiment d'échec[52]. Selon Allard, il est important que le professeur s'appuie sur les activités et les productions des élèves pour structurer le savoir[53].

49 — Hersant Magali, « Pratiques de débutants en mathématiques en maternelle : matérialité des situations et chronologie », *Revue française de pédagogie*, n° 208, p. 18-30, 2020.

50 — Hersant Magali, « Faire des mathématiques à l'école maternelle : À quelles conditions ? », *Grand N*, n° 110, p. 4-16, 2022.

51 — Broccolichi Sylvain, Roditi Éric, « Analyses didactique et sociologique d'une pratique enseignante », *Revue française de pédagogie*, n° 188, p. 39-50, 2014.

52 — Allard Cécile, Mamede Maíra, « Étude des conditions nécessaires pour favoriser l'exercice de la vigilance didactique des formateurs en formation initiale ciblée sur les liens entre apports théoriques et pratiques en classe », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Thématique 1|2023, p. 341-376, 2022.

53 — Allard Cécile, « Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions », thèse de doctorat de l'université Paris-VII, 2015.

Apports didactiques pour l'apprentissage du nombre à l'école maternelle

Le professeur doit connaître les fonctions et les représentations du nombre, il doit faire la différence entre nombre et quantité.

Les fonctions du nombre

Le nombre a trois fonctions enseignées à l'école maternelle.

- **Le nombre pour exprimer une quantité**. C'est la fonction cardinale du nombre. Elle intervient dans différentes situations : réaliser une collection dont le cardinal est donné, réaliser une collection comportant autant d'éléments qu'une autre alors que les deux ne sont pas visibles simultanément, etc.
- **Le nombre pour indiquer un rang, une position**. C'est la fonction ordinale du nombre. Les numéros des jours dans le mois ont cette fonction, comme ceux des quais de la gare ou des cases d'un jeu de plateau. La désignation des nombres ordinaux diffère de celles des nombres cardinaux, même si – en français – les exceptions sont nombreuses : on dit « le 1er février » mais aussi « le 2 février ».
- **Les nombres pour comparer ou calculer**. La comparaison des nombres permet de comparer des quantités ou des positions : la collection dont le cardinal est le plus grand est celle qui comporte la plus grande quantité ; la position correspondant au nombre le plus grand est la plus avancée. Le calcul permet de déterminer le cardinal d'une collection sans dénombrer : réunion de collections dont les cardinaux respectifs sont connus, ajout ou retrait d'une quantité connue à une quantité connue, etc. Le calcul permet aussi de déterminer une position : après un déplacement connu (en avant ou en arrière) à partir d'une position connue.

Une autre fonction ne relève pas des programmes d'enseignement à l'école : **le nombre pour désigner**. Le nombre est utilisé comme une étiquette[54]. Il pourrait être remplacé par une lettre, une couleur, etc. Il s'agit de numéros : ceux des autobus ou des maillots des joueurs d'une équipe, par exemple. Cette fonction n'est pas l'objet d'un enseignement particulier à l'école maternelle, même si ces numéros font partie du monde environnant des enfants et les conduisent à associer des noms de nombres à des écritures chiffrées.

54 — Roditi Éric, « L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant », *Spirale – Revue de recherches en éducation*, n° 36, p. 37-52, 2005.

Enseigner les représentations du nombre pour enseigner le nombre

Afin de conserver la mémoire d'une position ou d'une quantité, on utilise trois types de représentations :

- la représentation analogique (constellation, doigts de la main) ;
- la représentation verbale (mot-nombre) ;
- la représentation symbolique (écriture chiffrée).

Pour se souvenir d'une quantité, il n'est pas indispensable de lui associer un nombre : on peut la représenter par une collection équipotente d'objets (on dit que deux collections sont équipotentes lorsqu'elles ont autant d'éléments l'une que l'autre). Si un élève doit aller chercher juste ce qu'il faut de bouchons pour boucher des bouteilles, il peut lever un doigt pour chaque bouteille ou marquer un point sur une feuille de papier pour chaque bouteille, puis se déplacer sur le lieu où sont stockés les bouchons et prendre un bouchon par doigt levé ou par point marqué. Il aura alors bien autant de bouchons que de bouteilles, mais sans savoir combien il y en a ! Il s'agit d'une **représentation analogique** de la quantité. Comme l'expliquent Charnay et Valentin, comprendre la nécessité de conserver la mémoire de la quantité constitue sans doute une première étape vers l'apprentissage du nombre[55].

C'est en associant un nom de nombre à la quantité de doigts levés que l'élève saura combien il y avait de bouteilles, et combien de bouchons il a rapportés. Ce nom de nombre en est une **représentation verbale**. Ainsi l'élève peut dénombrer les bouteilles, trouver qu'il y en a six, mémoriser ce nombre et aller chercher six bouchons. Pour ne pas oublier ce nombre, il peut aussi le noter sur une feuille de papier, et donc utiliser son écriture chiffrée qui en est une **représentation symbolique** (voir figure 1).

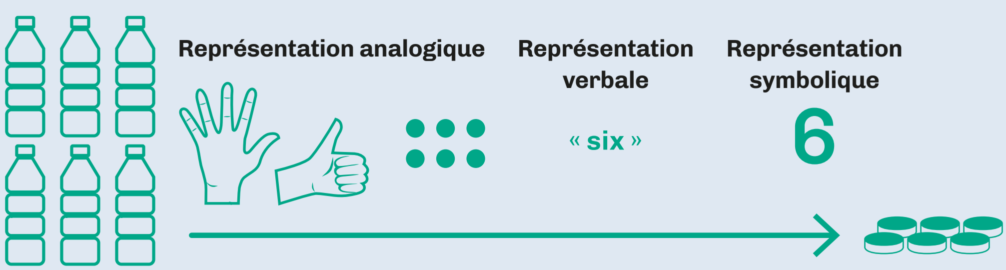


Figure 1. Les différentes représentations du nombre.

Pour favoriser l'apprentissage du nombre comme représentant de la quantité, les didacticiens ont imaginé des situations qui rendent les représentations analogiques inefficaces, par exemple une situation où l'élève n'a plus la possibilité de prendre lui-même les bouchons et doit les commander oralement à un autre élève !

55 — Charnay Roland, Valentin Dominique, « Calcul ou comptage ? Calcul et comptage ! », *Grand N*, n° 50, p. 11-20, 1991.

Il y a d'autres représentations des nombres, adaptées aux personnes déficientes auditives (les représentations en langue des signes remplacent les représentations verbales) ou visuelles (les écritures en braille remplacent les représentations symboliques chiffrées).

Enseigner le passage de la quantité au nombre

Traduire une quantité par un nombre nous est familier parce que nous l'avons appris enfant. À l'école maternelle, les professeurs doivent donc l'enseigner à leurs élèves, c'est-à-dire organiser des situations leur permettant de réaliser cet apprentissage.

Les élèves doivent même apprendre que, dans une collection d'objets, il y a une (et une seule) quantité. Les jeunes enfants affirment que, dans une même ligne de jetons, il y en a plus si l'on espace davantage les jetons, et il y en a moins si on les resserre. Ils maintiennent leur affirmation, même lorsqu'on leur rappelle la situation initiale[56]. Les enfants doivent donc apprendre l'indépendance entre la quantité et l'organisation spatiale de la collection, c'est cette indépendance que les psychologues appellent la **conservation des quantités**.

À la suite de ces travaux, Gréco a également constaté que certains enfants qui comptent le même nombre de jetons dans deux lignes de longueurs différentes affirment pourtant qu'il y a plus de jetons dans la ligne la plus longue[57]. Pour ces enfants, le nombre n'est pas encore totalement un indicateur de la quantité… Brissiaud explique cela en distinguant la maîtrise de l'utilisation de la comptine numérique (comptage-numérotage) et celle du dénombrement[58]. Parmi les enfants qui comptent huit jetons du premier jusqu'au huitième, certains attribuent un nom de nombre à chaque jeton sans que ce nom exprime le nombre de jetons. Ils ont compté jusqu'à huit, mais cela ne signifie pas pour eux qu'il y a huit jetons dans la ligne et que ce huit exprime une quantité bien précise. Ils ont compris la fonction ordinale du nombre, mais pas sa fonction cardinale. Pour d'autres enfants en revanche, huit exprime bien une quantité, c'est-à-dire que, pour eux, toutes les collections de huit objets ont autant d'objets, la même quantité, le même nombre. Ces enfants ont effectué un dénombrement. Pour inciter au dénombrement, le professeur peut insister pour que les élèves mettent en lien les noms des nombres et le dénombrement : « **Un** jeton, et encore un jeton, ça fait **deux** jetons, et encore un jeton, ça fait **trois** jetons… et encore un jeton, ça fait **huit** jetons. »

---

56 — Piaget Jean, Szeminska Alina, *La Genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neufchâtel, 1941.

57 — Gréco Pierre, « Quantité et quotité. Nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles », dans Gréco Pierre, Morf Albert, *Structures numériques élémentaires*, p. 1-70, PUF, Paris, 1962.

58 — *Ibid*, p. 3, note 1.

Les enfants, dans leur famille, apprennent souvent à compter avant même d'aller à l'école. Les professeurs doivent donc être très vigilants : un élève qui compte jusqu'à huit quand il y a huit objets à dénombrer n'a pas forcément compris que le dernier mot-nombre prononcé indique la quantité d'objets. Certains élèves qui connaissent la suite des nombres ne savent pas qu'il est fondamental de compter tous les objets de la collection une et une seule fois – ce que Briand appelle **énumération**[59] –, et que cela nécessite d'organiser le comptage. Des moyens pour évaluer de telles acquisitions figurent dans la partie 3.

Analyses de situations

« Les voyageurs » : vers la fonction cardinale du nombre

Après un temps de familiarisation avec le matériel, chaque élève dispose d'une boîte qui représente un wagon et au fond de laquelle est posée une fiche amovible avec des ronds dessinés qui représentent les sièges des voyageurs (voir figure 2). Une autre boîte, contenant les voyageurs, est posée dans un coin de la classe ; depuis cet endroit, on ne voit pas le fond du wagon. Un quai est matérialisé sur le côté du wagon. L'enseignant donne aussi un petit panier à chaque élève pour rapporter les voyageurs.

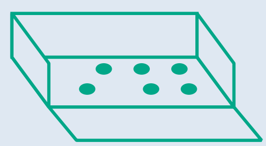


Figure 2. Boîte représentant le wagon et les sièges.

L'objectif de l'élève sera de rapporter autant de voyageurs qu'il y a de sièges dans le wagon. L'élève devra donc constituer une collection de voyageurs de même cardinal que la collection de sièges. L'éloignement du wagon et de la réserve de voyageurs contraint l'élève à trouver un moyen de garder la mémoire de la quantité. La situation vise ainsi la mise en fonctionnement de la fonction cardinale du nombre.

Consigne donnée aux élèves : « Tu dois aller chercher, en une fois, des voyageurs pour qu'il y ait un voyageur par siège, pas de siège sans voyageur, pas de voyageur sans siège. Tu utilises ton panier pour rapporter les voyageurs. »

59 — Briand Joël, « Enseigner l'énumération en moyenne section », *Grand N*, n° 66, p. 7-22, 2000.

LA CONSIGNE

La formulation « il doit y avoir un voyageur par siège, pas de voyageur sans siège, pas de siège sans voyageur » exprime **la condition de la réussite**. Cette condition permet aux élèves de valider ou d'invalider seuls leur production. Il est très important que l'élève comprenne que sa réussite relève du respect ou non de ces conditions posées au départ[60].

Cette formulation peut sembler redondante, mais elle présente plusieurs avantages. C'est d'abord une façon non ambiguë de demander de prendre le même nombre de voyageurs que de ronds sans utiliser les mots « combien », « nombre » ou « autant ». Ces mots risqueraient en effet d'orienter les élèves vers des procédures de dénombrement sans qu'ils ressentent vraiment cette nécessité mathématique. Par ailleurs, le mot « autant » peut être inconnu ou mal compris des jeunes élèves.

La consigne donnée correspond à une situation d'action visant la construction du nombre comme mémoire de la quantité. La consigne « Lucie va maintenant aller chercher les voyageurs à ta place. À toi de lui donner les informations pour cela. Il faut toujours un voyageur par place, pas de place sans voyageur, pas de voyageur sans place. » correspond à une situation de formulation qui sera utilement proposée dans le prolongement de la situation d'action pour pousser l'élève à formuler la quantité de voyageurs à aller chercher. Selon les contraintes que l'on pose sur la façon de formuler (communiquer oralement ou par écrit la quantité, donner l'étiquette-nombre correspondant à la quantité, etc.), des connaissances différentes sont convoquées. Attention : un élève qui lèverait autant de doigts que de ronds dans la situation d'action pourrait dessiner autant de croix que de ronds dans la situation de formulation écrite, il conviendrait alors de valider sa procédure et d'exiger une formulation orale ou de demander une étiquette de nombre pour l'aider à passer de la représentation analogique de la quantité au nombre.

Lors de la présentation de la situation, l'enseignant explique et montre comment « jouer » en tenant compte des contraintes. Il s'appuie alors sur un exemple, comme la grille de quatre sièges, et simule une réussite et un échec afin d'introduire, dès la situation de dévolution, les moyens de l'auto-validation. Si un élève comprend qu'il faut prendre systématiquement quatre passagers, le changement de fiche le conduira à prendre en considération les contraintes du milieu et à ainsi mieux comprendre le problème posé.

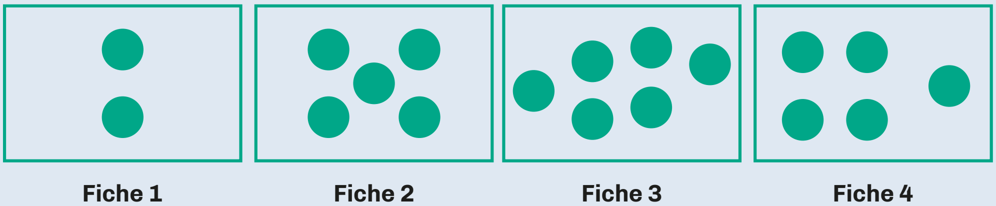
LES VARIABLES DIDACTIQUES

La fiche amovible où sont dessinés les sièges n'est pas visible depuis l'endroit où est située la réserve de voyageurs ; elle ne peut pas être emportée par l'élève. Ces conditions évitent qu'il prenne un voyageur par siège sans utiliser le nombre. L'élève n'a pas non plus le droit de faire des allers et retours en prenant les voyageurs un à un.

Les sièges sont dessinés sur les fiches. L'élève ne peut donc pas réorganiser cette collection pour la dénombrer plus facilement. Le nombre de sièges dessinés et leur

60 — Hersant Magali, « Faire des mathématiques à l'école maternelle : à quelles conditions ? », *Grand N*, n° 110, p. 5-19, 2022.

disposition influencent les procédures qui seront utilisées pour dénombrer, et les connaissances nécessaires pour cela. Ces fiches sont donc des leviers pour faire évoluer les procédures des élèves, on dit que ce sont des **variables didactiques**. La première de leurs fonctions est d'adapter la tâche aux acquis des élèves. Ainsi, les fiches 1 et 2 permettent de reconnaître la quantité par perception visuelle immédiate (par *subitizing*[61] pour la fiche 1 et par reconnaissance de la constellation du dé pour la fiche 2). La collection représentée sur la fiche 3 n'est pas organisée, l'élève va devoir compter pour dénombrer. Avec la fiche 4, l'élève peut constituer la collection de voyageurs en retenant qu'il en faut 4 et encore 1, ce qui est une façon de désigner la quantité de voyageurs, même si cette désignation ne dit pas combien.



Fiches 1, 2, 3, 4. Fonds de boîte pour la situation des voyageurs.

Dans la situation d'action, le matériel disponible pour garder la mémoire de la quantité est une variable didactique. Si les élèves ne disposent pas de matériel auxiliaire (papier et crayon par exemple), hormis leurs doigts, ils ne pourront pas constituer de collection intermédiaire (par exemple dessiner autant de ronds que de sièges). Ils seront ainsi conduits à dénombrer la quantité de sièges. Donner le panier dès le départ constitue un moyen de limiter les possibilités d'utiliser les doigts comme collection intermédiaire.

LA DIFFÉRENCE ENTRE « FAIRE » À L'ÉCOLE ET « APPRENDRE » À L'ÉCOLE

Comme celles que nous avons analysées, les situations conçues pour l'école maternelle reposent souvent sur du matériel. Celui-ci est pensé pour que les élèves réalisent les tâches proposées grâce à leurs actions. Il est aussi pensé pour que les élèves construisent les connaissances qui sous-tendent ces actions. Cela n'a rien d'automatique : comme le montrent différentes recherches[62], il ne suffit pas que les élèves agissent pour qu'ils apprennent de leurs actions. Certains élèves n'ont pas compris qu'ils ont à apprendre de ce qu'ils ont fait, ils croient que seule la réussite est importante et, par conséquent, ils ne comprennent pas les enjeux de l'institutionnalisation.

61 — Cf. note 13.

62 — Coulange Lalina, « Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation de savoirs mathématiques », *Spirale – Revue de recherches en éducation*, n° 54, p. 9-27, 2014.
Margolinas Claire, « Essai de généalogie en didactique des mathématiques », INRP, UMR ADEF, Marseille, 2004.
Perrin-Glorian Marie-Jeanne, « Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes “faibles” », *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 13(1, 2), p. 5-118, 1993.

Par exemple, dans la situation du voyageur, la « plate-forme » est un moyen de différer le passage de l'action (rapporter des voyageurs) à la validation (installer les voyageurs sur les sièges). Quand les voyageurs sont posés sur la plate-forme, l'enseignant peut poser la question : « Est-ce que tu penses que tu as bien un passager par siège, pas de siège sans passager et pas de passagers sans siège ? » L'élève aura alors la possibilité de réfléchir une nouvelle fois à ce qui est attendu, y compris de recommencer si, par exemple, il a rapporté des voyageurs sans se soucier de leur quantité. La plate-forme rend possible une intervention de l'enseignant pour aider les élèves à comprendre que la pensée doit précéder leur action, et qu'ils ont à apprendre de leur action.

« L'escargot » : vers la fonction ordinale du nombre

Quatorze cartes à jouer, dont le verso est identique, sont alignées sur une table ou sur le sol. À l'une des extrémités est positionné un disque bleu, à l'autre un disque rouge (voir figure 3). Un élève ferme les yeux. Pendant ce temps, à la vue des autres élèves, le professeur cache sous une des cartes un dessin d'escargot. L'élève qui a fermé les yeux doit retrouver où est caché l'escargot. Les autres élèves peuvent l'aider, mais n'ont pas le droit de montrer l'emplacement de la carte, ils peuvent seulement expliquer avec des mots.

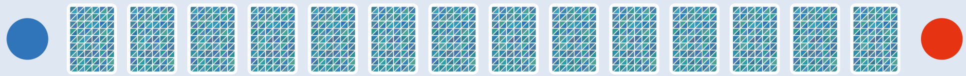


Figure 3. Ligne de cartes orientée par les points de couleur.

L'objectif est que l'élève utilise le nombre pour repérer la position de la carte sous laquelle est caché l'escargot. C'est donc bien la fonction ordinale du nombre qui est travaillée ici. Attention, le nombre permet de repérer une carte à la condition d'indiquer à partir de quelle extrémité on commence à compter. Il est pour cela préférable de choisir un nombre de cartes pair. En effet, avec onze cartes par exemple, la formulation « l'escargot est sous la sixième carte » conduira à trouver l'escargot bien que le point de départ n'ait pas été précisé.

LA DÉVOLUTION

Les disques bleu et rouge sont positionnés, mais l'enseignant ne dit rien sur leur usage. Il est en effet important que les élèves utilisent d'eux-mêmes ces repères pour désigner la position de l'escargot.

Pour que chaque élève comprenne bien le problème, et en particulier n'y voie pas un jeu de hasard (c'est l'enjeu de la dévolution), il est intéressant d'effectuer une ou deux parties au cours desquelles les élèves peuvent montrer où est caché l'escargot. Empêcher d'indiquer cet emplacement posera alors une contrainte, qui obligera les élèves à trouver une façon de repérer la carte qui masque l'escargot, puis de désigner l'emplacement de cette carte par sa position dans la file de cartes.

Pour les premières parties, l'enseignant placera l'escargot à l'une des extrémités, ce qui conduira probablement à des formulations comme « l'escargot est sous la carte juste avant le point rouge » où le nombre n'est pas encore nécessaire. Au fil des parties, l'enseignant éloignera l'escargot des extrémités afin de rendre indispensable l'utilisation du nombre pour désigner sa position dans la file.

LA VALIDATION

Cette situation est conçue pour rendre possible la validation des propositions des élèves. Les points rouge et bleu évitent toute ambiguïté sur l'origine du comptage et sur le numéro de chacune des cartes. La proposition « tu pars du point rouge et tu comptes quatre cartes » permet ainsi de désigner une carte avant de vérifier que l'escargot est bien sous cette carte en la retournant.

Des propositions comme « tu comptes les cartes en partant du point rouge, quand tu es arrivé à 5, c'est la bonne carte » ou « l'escargot est sous la carte numéro 5 en partant du point rouge » ou « l'escargot est sous la cinquième carte en partant du point rouge » seront ainsi validées par le matériel. Ces formulations mobilisent toutes le nombre dans sa fonction ordinale, même celles qui ne comportent pas le mot « cinquième », puisqu'elles désignent bien la position de la carte qui cache l'escargot.

L'enseignant a un rôle important pour éviter que les élèves valident à tort certaines procédures. Si un élève indique que « l'escargot est sous la quatrième carte », l'enseignant invitera les élèves à repérer l'ambiguïté tout en maintenant, autant que possible, la validation par le matériel. Il pourra, par exemple, prendre le rôle de l'élève devant valider la proposition et soulever la quatrième carte en partant du disque bleu et ainsi mettre en évidence que l'escargot n'est pas caché sous cette carte.

« Les trois bandes » : vers la comparaison

Trois bandes sont disposées sur la table d'un élève. L'élève dispose de pions qu'il doit répartir sur les trois bandes de manière à avoir le même nombre de pions sur chaque bande. La quantité de pions doit être assez importante pour rendre l'utilisation du nombre nécessaire, entre 15 et 36 par exemple. Trois étapes conduisent à faire évoluer les procédures initiales des élèves pour aboutir au dénombrement et à la comparaison. La fonction cardinale se conjugue ainsi à la comparaison pour atteindre l'objectif fixé.

Étape 1. Les bandes sont amovibles (voir figure 4). Le matériel rend possible la correspondance terme à terme comme outil de comparaison. La validation convoque les notions telles que : plus que, moins que, autant que. Mais le nombre n'est pas encore indispensable.

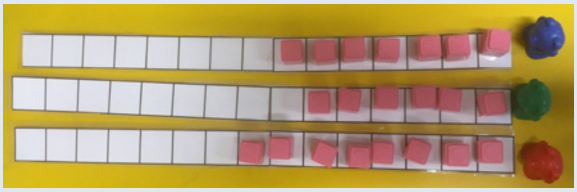


Figure 4. Comparer des quantités sans dénombrer.

Étape 2. Les bandes sont fixées et disposées de manière à rendre difficile la correspondance terme à terme (voir figure 5). Dans la situation de validation, les élèves qui utilisent le nombre de pions pour comparer apprennent que, s'il y a le même nombre de pions sur chaque bande, alors il y a autant de pions sur chaque bande. Mais ils peuvent encore s'appuyer sur la perception visuelle et la comparaison des longueurs.

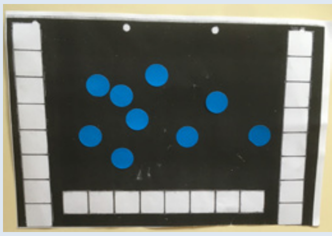


Figure 5. Partager équitablement une grande collection.

Étape 3. Six gommettes qui représentent des pions sont collées sur les bandes (voir figure 6). L'objectif est toujours d'obtenir le même nombre de cases occupées (pions et gommettes) sur chaque bande. Les gommettes étant collées en nombre différent et à des emplacements différents sur chaque bande, la répartition équitable des pions devient inefficace et la validation par le dénombrement nécessaire.

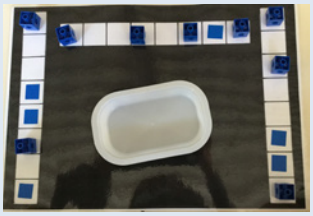


Figure 6 . Utiliser le nombre pour partager équitablement une collection.

L'INSTITUTIONNALISATION

La situation d'action, dans les trois étapes, vise le même objectif : obtenir le même nombre de pions sur chaque bande. On pourrait penser que les élèves vont répartir les pions sur les bandes, compter les pions répartis, puis ajuster la répartition afin d'obtenir le même nombre de pions sur chaque bande. L'expérience montre toutefois que, majoritairement, les élèves répartissent les pions sur les trois bandes, puis comptent la totalité des pions disposés sur les bandes ; ce qui ne permet pas de comparer les trois quantités. Lorsque les pions sont assez nombreux, parmi les élèves qui réussissent, certains ne dénombrent pas les pions, mais les cases vides : ils raisonnent sur le complément.

Différentes procédures coexistent donc dans la classe ; certaines sont efficaces, d'autres non. Parmi les procédures efficaces, certaines sont plus efficientes que d'autres. L'enseignant est attentif au travail effectué par les élèves afin d'identifier précisément les procédures utilisées. Il est essentiel, en effet, que l'institutionnalisation s'appuie sur ce qui a été fait en classe : elle invalide les procédures erronées, elle hiérarchise les procédures efficaces et aboutit à la mise en évidence de la plus efficiente. Pour gérer la situation d'institutionnalisation à l'école maternelle, le professeur aide les élèves à se remémorer leur activité et à être attentifs à celle des autres. Il utilise à cet effet des photos ou des extraits vidéo (voir figure 7).

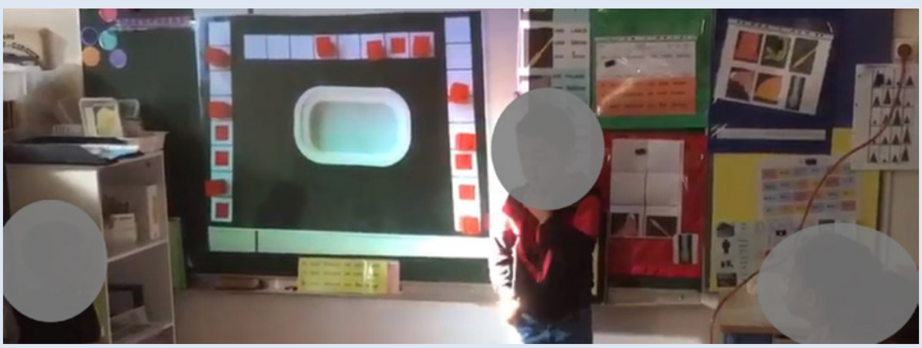


Figure 7. Accompagner la re-mémorisation pour l'institutionnalisation.

« Le bon panier[63] » : du nombre au calcul

Le matériel est composé d'une part de messages comportant une instruction de coloriage illustrant par exemple « 4 œufs verts et 5 œufs rouges », et, d'autre part, à distance des tables des élèves, de dessins de paniers remplis d'œufs à colorier. L'élève reçoit un message. Sans le transporter, il doit aller chercher « le bon panier », c'est-à-dire l'image représentant un panier comportant juste ce qu'il faut d'œufs pour qu'il puisse réaliser le coloriage indiqué dans le message. L'élève rapporte son panier et colorie les œufs. La tâche est réussie si les deux critères sont réalisés : l'instruction de coloriage est respectée et tous les œufs sont coloriés. La procédure visée pour trouver le bon panier est une procédure de calcul : déterminer le cardinal d'un tout à partir de celui de ses parties. Pour le message précédent, un élève qui lève 4 et 5 doigts trouvera le bon panier sans avoir déterminé la somme. En jouant sur les variables de la situation, l'enseignant conduit progressivement vers la procédure visée (il peut aussi, temporairement, laisser certains élèves transporter leur message s'il le juge nécessaire).

Dans une première étape, la disposition des œufs dans le bon panier correspond à la décomposition issue du message (par exemple 9 œufs séparés en deux groupes de 4 œufs et 5 œufs pour le message 4 verts et 5 rouges, voir figure 8). Cette étape est essentielle pour faire comprendre les contraintes de la situation, même si d'autres procédures que celle visée sont valides. La disposition des œufs au sein des groupes est une variable importante, car elle oriente vers une procédure plutôt qu'une autre : reconnaissance immédiate (*subitizing* ou constellation du dé) ou dénombrement.

Figure 8. Disposition des œufs correspondant au message.

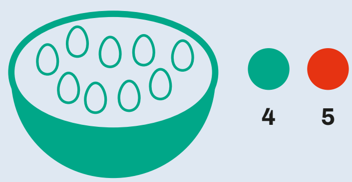


Figure 9. Disposition des œufs sans correspondance avec le message.

Dans une deuxième étape, la disposition des œufs est indépendante du message (voir figure 9). Suivant la taille des nombres en jeu, l'élève pourra :

- utiliser ses doigts ;
- mémoriser les deux nombres ;
- surcompter (compter 5 œufs rouges à partir des 4 œufs verts et obtenir 9 œufs)
- calculer (par exemple, trouver 9 en comprenant qu'il y aura 1 œuf de moins que s'il y en avait eu 5 verts et 5 rouges).

63 — Briand Joël, Loubet Martine, Salin Marie-Hélène, *Apprentissages mathématiques à l'école maternelle*, Hatier, Paris, collection Pédagogie, 2004.
Cette situation est adaptée à la transition grande section-CP, en ce qu'elle amorce le passage du dénombrement au calcul.

L'enseignant observe les élèves et prélève des informations sur les procédures et les paniers choisis par eux. Ces informations constituent des indicateurs de leurs connaissances et de leur capacité à s'adapter à la situation. Plusieurs essais sont généralement nécessaires, ce qui est le signe que la situation est adaptée aux connaissances des élèves et aux objectifs de la séance. Une fois devant les paniers, certains hésitent, se souviennent d'une des deux quantités et ont oublié l'autre ; d'autres manifestent le besoin d'aller relire le message, etc. Enfin, certains élèves construisent des premiers faits numériques en retenant que 4 et 5 font 9.

À chaque étape, des mises en commun sont nécessaires pour que les procédures soient décrites : celle où on reconnaît immédiatement quatre, celle où l'on recompte tous les œufs, celle où l'on compte à partir du nombre d'œufs rouges (surcomptage), celle où l'on sait déjà le total des deux nombres, celle où l'on retrouve ce total, etc. Les élèves décrivent plus ou moins facilement leurs activités (matérielle et cognitive). Dans ces mises en commun, il est important de ne pas mettre l'accent sur une procédure en particulier afin d'éviter que les élèves l'utilisent systématiquement, y compris quand elle est peu adaptée.

D'autres étapes sont possibles : donner des instructions de coloriage avec trois couleurs au lieu de deux, introduire une situation de formulation à autrui où l'élève ne doit plus trouver lui-même le bon panier, mais doit le commander à un autre élève, etc. Les variables didactiques sont nombreuses, cette situation constitue donc une source de riches expériences pour les élèves et ils peuvent progresser à leur rythme en mobilisant des procédures adaptées aux quantités et aux décompositions proposées ainsi qu'aux représentations des œufs dans les paniers. Ces expériences conduisent à la construction progressive de faits numériques comme « dix, c'est cinq et cinq, ou six et quatre, ou encore quatre et quatre et deux ». La fréquentation de ces faits numériques et l'affichage de paniers « modèles » contribuent à forger l'écrit comme un outil pour garder en mémoire les connaissances mathématiques mobilisées durant les activités.

Focus | Égalité filles-garçons en mathématiques à l'école maternelle

De nombreux travaux ont été menés pour étudier les différences genrées de pratiques enseignantes en mathématiques, que ce soit au niveau des interactions enseignant-élèves ou au niveau des représentations des enseignants ou des assignations sexuées qui en découlent[64]. La plupart ont été menées au niveau de l'école élémentaire ou du collège. Annette Jarlégan a montré que les filles et les garçons sont progressivement incités à investir différemment les mathématiques à l'école élémentaire[65]. Nicole Mosconi a, de son côté, mis en évidence des différences quantitatives et qualitatives de traitement des élèves en mathématiques selon leur sexe à l'école élémentaire[66].

QU'EN EST-IL À L'ÉCOLE MATERNELLE ?

Les études qui portent sur l'école maternelle n'indiquent pas de distinction de genre dans la maîtrise des compétences mathématiques. La distinction se fait à partir de 6 ans, ce qui interroge l'enseignement des mathématiques au début de l'école élémentaire[67].

Les évaluations repères de CP (temps 1 & 2) et de CE1 (temps 3) doivent cependant nous interpeller. À l'entrée au CP (temps 1), globalement aucune différence de résultats en mathématiques n'est constatée selon le sexe des élèves alors que dès le temps 2, et plus encore au temps 3, les écarts se creusent entre les filles et les garçons, au détriment des filles. Les choses sont plus complexes si l'on regarde exercice par exercice, car certaines différences notables apparaissent entre les filles et les garçons.

---

64 — Mosconi Nicole, « Comment les pratiques enseignantes fabriquent-elles de l'inégalité entre les sexes ? », *Les dossiers des sciences de l'éducation*, n° 5(1), p. 97-109, 2001.
Jarlégan Annette, « La fabrication des différences : sexe et mathématiques à l'école élémentaire », thèse de doctorat, université de Bourgogne, Dijon, 1999.
Duru-Bellat Marie, « À l'école du genre », *Enfances & Psy*, n° 1, p. 90-100, 2016.

65 — Jarlégan Annette, « La fabrication des différences : sexe et mathématiques à l'école élémentaire », thèse de doctorat, université de Bourgogne, Dijon, 1999.
Jarlégan Annette, « Genre et dynamique interactionnelle dans la salle de classe : permanences et changements dans les modalités de distribution de la parole », *Le français aujourd'hui*, n° 193, p. 77-86, 2016.

66 — *Ibid*, note 64 (Mosconi, 2001).

67 — Fischer Jean-Paul, Thierry Xavier, "Boy's Math Performance, Compared to Girls', Jumps at Age 6 (in the ELFE's Data at Least)", *British Journal of Developmental Psychology*, n° 40, p. 504-519, 2022.

Des travaux sur les inégalités genrées à l'école maternelle ont mis en évidence des différences de comportements des filles et des garçons dans la cour de récréation[68], l'impact différencié sur les filles et les garçons des albums de littérature de jeunesse intégrant des stéréotypes genrés[69] ou des contre-stéréotypes[70], des différences de développement verbal dans la manipulation de jouets stéréotypés[71], des différences de jugements des enseignants vis-à-vis des élèves selon qu'ils soient filles ou garçons[72].

Il est donc important d'exercer une vigilance quotidienne dans sa classe pour contrer les stéréotypes de genre inconsciemment à l'œuvre dès l'école maternelle, en veillant par exemple à :

— choisir des collections à dénombrer ou des objets à manipuler qui n'ont pas de valeur genrée ou bien qui sont proposés indifféremment aux filles et aux garçons quelle que soit leur nature stéréotypée ;
— interpeller quantitativement et qualitativement, à la même hauteur, les filles et les garçons ;
— ne pas enfermer les élèves dans des identités d'élève-fille ou d'élève-garçon à partir de consignes ou d'interpellations stéréotypées.

---

68 — Zaidman Claude, *La Mixité à l'école primaire*, L'Harmattan, Paris, 1996.
Pasquier Gaël, « La cour de récréation au prisme du genre, lieu de transformation des responsabilités des enseignant-es à l'école primaire », *Revue des sciences de l'éducation*, n° 41(1), p. 91-114, 2015.

69 — Dias-Chiaruttini Ana, « Réception des stéréotypes genrés véhiculés par la littérature de jeunesse dans des espaces institutionnels contrastés », *Repères. Recherches en didactique du français langue maternelle*, n° 51, p. 35-54, 2015.

70 — Ferrière Séverine, Morin-Messabel Christine, « Adhésion/transgression des stéréotypes de sexe dans un album de jeunesse : analyse en lecture offerte », *Psychologie et éducation*, n° 1, 2013.

71 — Bardet Julie, « Stéréotypes de genre : analyse verbale et comportementale dans le contexte de la manipulation de jouets au cours d'interactions entre parents et enfants de trois ans », thèse de doctorat, université Grenoble Alpes, 2021.

72 — Benit Stéphane, Sarremejane Philippe, « Les effets des pratiques évaluatives sur les élèves de maternelle », *Pratiques sociales et apprentissages*, 2017.
Jarlégan Annette, Tazouti Youssef, « Le genre à l'école maternelle : les représentations, jugements et attentes des enseignantes de grande section », *Éducation et socialisation, Les Cahiers du CERFEE*, n° 32, 2012.

En résumé

- Les nombres sont des outils pour : la quantification, le rangement, la comparaison et le calcul.
- Le comptage est l'une des procédures de dénombrement. Il y en a d'autres.
- On représente les nombres de façon analogique (représentation concrète ou figurée), verbale (mot-nombre) ou symbolique (écriture chiffrée).
- L'enseignant propose des situations didactiques qui provoquent des activités différentes chez les élèves (action, formulation, validation) et qui ont chacune leur rôle dans l'apprentissage.
- En amont de la séance, l'enseignant choisit des situations propices à l'apprentissage des savoirs visés en portant attention aux variables didactiques, à la consigne et aux conditions de la réussite.
- Durant la séance, l'enseignant s'assure que les élèves s'approprient la question, il observe et analyse leur activité, hiérarchise les procédures et explicite les connaissances à mémoriser et à entraîner.

III

Quelles mises en œuvre pédagogiques pour prendre en compte les besoins de chaque élève ?

Ce chapitre vise à donner des pistes pour enseigner et mettre en œuvre le processus d'acquisition de la notion de nombre chez les élèves de maternelle. Il s'appuie sur la construction d'une programmation de cycle au sein de l'école et propose des situations de manipulations motivantes, variées et évolutives de la petite section à la grande section. Il invite enfin à un enseignement structuré, progressif, différencié et régulé s'appuyant sur le langage oral et écrit ainsi que sur l'évaluation et l'observation des élèves qui donne donc lieu à une évaluation à partir de critères identifiés[73].

Acquérir le nombre c'est être capable de résoudre des problèmes qui mobilisent le nombre en utilisant toutes les procédures possibles :

— perception visuelle de quantités très différentes ;
— perception visuelle de quantités inférieures ou égales à 3 ;
— perception visuelle due à la représentation spatiale des éléments (les constellations par exemple) ;
— correspondance terme à terme, comptage de un en un/dénombrement, utilisation de la frise numérique.

Envisager la progressivité des apprentissages sur le nombre au cycle 1 nécessite donc d'identifier tous les types de situations impliquant le nombre, pouvant être proposés dans ce cycle, et toutes les procédures possibles pour résoudre ces situations en les hiérarchisant de la plus simple à la plus complexe.

73 — La page Éduscol « Acquérir les premiers outils mathématiques » propose des ressources qui présentent les critères d'évaluation : https://eduscol.education.fr/2819/acquerir-les-premiers-outils-mathematiques-cycle-1.

Les étapes de l'apprentissage du nombre

Construire une programmation de cycle

Pour favoriser la réussite des élèves, il est primordial qu'au sein de chaque école maternelle, les enseignants travaillent en équipe afin de définir une progressivité des enseignements sur tout le cycle.

Établir une programmation de l'enseignement du nombre ne peut pas se limiter à fixer les nombres étudiés pour chaque niveau de classe. Prenons ainsi l'exemple d'une activité pouvant être résolue par des élèves de trois ans, citée dans les questions fréquentes partagées au début de ce guide : chaque élève dispose de six assiettes et de cinq fourchettes. La question porte sur l'égalité ou non des quantités des deux collections. Pour mettre la table, il faut une fourchette pour chaque assiette. Il ne faut pas qu'il reste des assiettes sans fourchette ou inversement. Le matériel étant déplaçable, l'élève peut placer une fourchette dans chaque assiette et se rendre compte qu'il reste une assiette sans fourchette. Cette procédure de correspondance terme à terme n'implique pas de savoir dire la quantité de fourchettes ou d'assiettes. Cette situation porte sur des quantités supérieures à 3 alors qu'elle peut être proposée à des élèves de trois ans. On ne peut donc pas dire qu'on se limite aux quantités de 1 à 3 pour les élèves de trois ans.

Si le programme indique les compétences que les élèves doivent acquérir à la fin de l'école maternelle, il n'identifie pas les étapes nécessaires à leur acquisition. Il n'est pas possible d'envisager la progressivité des apprentissages en répartissant les compétences citées dans le programme sur les trois années du cycle puisque la majorité sont travaillées tout au long du cycle. Ainsi, par exemple, la compétence « Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale » intervient dans beaucoup de situations de recherche de la quantité travaillées de la petite section à la grande section.

L'inventaire des problèmes impliquant le nombre permet d'envisager une programmation sur le cycle à partir des types de situations et des procédures travaillés. Rappelons qu'une programmation sur le cycle consiste à identifier les différents objectifs de séquences en les ordonnant. Chaque séquence comporte plusieurs séances dont l'ensemble des objectifs permet d'atteindre l'objectif de séquence.

Faire évoluer le rôle de la manipulation

Le rôle de la manipulation évolue progressivement pour permettre aux élèves d'accéder à l'abstraction. Le matériel tangible est progressivement remplacé par des objets manipulables moins figuratifs, comme des jetons ou des cubes. La manipulation est ensuite progressivement empêchée afin de permettre aux élèves de comprendre les concepts mathématiques abordés.

La manipulation n'est pas une finalité, mais une étape intermédiaire permettant d'engager un travail cognitif. Le matériel change progressivement de statut : de matériel pour observer, il devient matériel pour valider ce qu'on est capable d'anticiper. Il permet également de raisonner sur les procédures.

La manipulation motive les élèves à s'engager dans une démarche de résolution de problème qui leur permet de comprendre les concepts visés. Manipuler permet de comprendre « où est le problème », « ce qu'on se demande » et joue aussi un rôle fondamental dans la validation par les élèves des solutions proposées. Cependant, la manipulation doit progressivement être contrainte et, à un moment donné, empêchée pour accéder au nombre qui est et restera un concept, une abstraction. Se contenter de « manipulations seules » est illusoire, car elles enferment les élèves dans l'action alors que l'objectif est de les amener à penser cette action et à comprendre les notions mathématiques abordées. D'ailleurs, très souvent, c'est quand l'élève s'arrête de manipuler « en actes » qu'on voit qu'il a compris, qu'il entrevoit ce qui fait que cela va fonctionner une autre fois, dans un autre contexte avec un autre matériel.

Mener un enseignement progressif qui s'appuie sur le langage oral et écrit

Le rôle de la manipulation est articulé à celui de la verbalisation qui permet à l'élève de décrire et d'expliquer sa procédure (« J'ai mis quatre dans ma tête et, avec mes doigts, j'ai fait cinq, six. »), puis de valider (ou non) la solution. La verbalisation par l'enseignant et par l'élève des actions réalisées et de leurs résultats constitue une aide importante à la prise de conscience des procédures utilisées et de leurs effets.

L'enseignant est attentif à organiser les échanges oraux pour aider à structurer les apprentissages des élèves :

- il aide à décrire les situations, les relations et à justifier sa réponse ;
- il attire l'attention sur certaines procédures et connaissances utilisées en situation ;
- il questionne : « Comment le sais-tu ? Comment fais-tu ? Comment es-tu sûr de ta solution ? Comment peux-tu vérifier ? » et introduit le vocabulaire spécifique pour que les enfants l'apprennent, se l'approprient et l'utilisent.

Conduire un enseignement différencé et régulé par l'observation et l'évaluation des acquis des élèves

Le professeur observe les élèves en activité pour évaluer et réguler les apprentissages en mathématiques. Ces observations orientent la suite des activités et des situations pédagogiques à leur proposer[74]. L'enseignant planifie, régule et différencie les activités qu'il propose aux groupes d'élèves en variant notamment la taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets (les déplacer ou non), le fait d'avoir à anticiper la réponse lorsque les objets sont éloignés ou dissimulés, le fait d'être contraint à formuler oralement ou par écrit la quantité d'objets à aller chercher. Ces variables importantes amènent progressivement les élèves à faire évoluer leurs procédures et à construire les savoirs attendus.

Comment construire un enseignement progressif pour chaque fonctionnalité du nombre

Le programme cite les trois principales utilisations du nombre qui ont été vues plus haut et qu'il faut prendre en compte pour envisager une programmation tout au long des trois années de maternelle.

Programmation de l'enseignement de la fonction cardinale des nombres

Nous indiquons les différentes étapes dans l'acquisition du nombre en tant que quantité à partir desquelles une programmation peut être établie. Chaque étape comporte plusieurs types de situations ou procédures qui permettent de définir les séquences à proposer. Il est bien entendu possible de regrouper plusieurs types de situations ou procédures dans une même séquence, voire dans une même séance. Il est aussi

74 — Voir les ressources pour accompagner la mise en œuvre du domaine 4 « Acquérir les premiers outils mathématiques en cycle 1 » : https://eduscol.education.fr/2819/acquerir-les-premiers-outils-mathematiques-cycle-1.

possible de scinder une étape en plusieurs étapes pour définir une séquence. Tout dépend des élèves. Tous les types de situations pour une même procédure peuvent ne pas être travaillés si l'on s'assure par une évaluation que les objectifs énoncés pour l'étape sont atteints au regard de la situation proposée.

Les étapes ci-dessous concernent uniquement l'acquisition des différentes quantités en les désignant oralement. L'acquisition de la désignation d'une quantité par une écriture chiffrée est traitée ensuite.

Le nombre en tant que quantité avec sa désignation orale

ÉTAPE 1 : LA CORRESPONDANCE TERME À TERME POUR DES QUANTITÉS INFÉRIEURES, ÉGALES OU SUPÉRIEURES À 3

Objectifs

- Commencer à construire la notion de quantité **sans faire intervenir la suite numérique orale, sans compter les objets un par un, mais juste en regardant**.
- Acquérir la procédure de correspondance terme à terme (associer chaque élément d'une collection à un élément d'une autre collection) qui servira, dans les étapes suivantes, à valider les résultats dans les activités nécessitant une autre procédure.

Types de situations et procédures

- Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée en utilisant la correspondance terme à terme.

Exemple :

Matériel : 4 poupées et des assiettes empilées (plus que 4).

Tâche : mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.

- Comparer les quantités de deux collections en s'assurant qu'il y en a autant dans chaque collection et en utilisant la correspondance terme à terme.

Exemple :

Matériel : 5 poupées d'un côté et 5 assiettes un peu éloignées des poupées.

Tâche : dire s'il y a juste ce qu'il faut comme assiettes pour que chaque poupée ait une assiette et qu'il ne reste pas d'assiette. On a le droit de bouger les poupées ou les assiettes.

L'enseignant introduit le terme « **autant que** ». Exemple : « Il y a une assiette pour chaque poupée. Il n'y a pas de poupée sans assiette. Il ne reste pas d'assiette sans poupée. Il y a autant de poupées que d'assiettes. »

Pour les quantités jusqu'à 3, l'enseignant les nomme en utilisant les itérations de 1. Exemple : « Il y a trois assiettes, une assiette et une assiette et encore une assiette, ça fait trois assiettes. »

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Formaliser l'introduction du terme « autant que » et les mots-nombres désignant les quantités jusqu'à 3. Introduire les itérations de 1 pour distinguer les quantités 1, 2 et 3 (« deux, c'est un et encore un » ; « trois, c'est un, encore un et encore un »).

ÉTAPE 2 : LA RECONNAISSANCE VISUELLE ET LA DÉSIGNATION ORALE DES QUANTITÉS 1 ET 2 PUIS DES QUANTITÉS DE 1 À 3

Objectifs

— Construire des collections de 1 ou 2 éléments puis de 1 à 3 éléments sans faire intervenir la suite numérique orale.
— Commencer à nommer les quantités 1 et 2 puis de 1 à 3.
— Utiliser la procédure de correspondance terme à terme pour valider ses résultats.

Types de situations et procédures pour les quantités 1 et 2

— Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée par perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 2 poupées et des assiettes (plus que 2 assiettes).

Tâche : mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.

— Comparer plusieurs collections à une collection donnée en se limitant à déterminer celle où il y en a autant que dans la collection de référence, par perception visuelle.

Exemple :

Matériel : 2 poupées, une boîte avec une assiette, une boîte avec 2 assiettes bien visibles, une boîte avec 3 assiettes bien visibles.

Tâche : trouver la boîte d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette et qu'il ne reste pas d'assiette.

Exemple avec autant que : « Il y a une assiette pour chaque poupée. Il n'y a pas de poupée sans assiette. Il ne reste pas d'assiette sans poupée. Il y a autant de poupées que d'assiettes. »

L'enseignant nomme les quantités en utilisant les itérations de 1 pour distinguer 1 et 2. Exemple : « Il y a deux assiettes : une assiette et encore une assiette, ça fait deux assiettes. »

— Réaliser une collection dont la quantité est indiquée par l'enseignant (1 ou 2) par perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : des assiettes (plus que 2).

Tâche : prendre 2 assiettes.

L'enseignant a indiqué clairement la quantité dans la consigne et explicite lors du bilan la décomposition de 2 (« deux, c'est un et encore un »).

— Indiquer la quantité d'une collection (1 ou 2) par perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Combien y a-t-il de poupées ?

L'enseignant explicite la décomposition de 2 (« deux, c'est un et encore un »).

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

— Formaliser l'introduction des mots-nombres désignant les quantités 1 et 2, puis 3.
— Verbaliser la décomposition de 2, pour distinguer les quantités 1 et 2 (« deux, c'est un et encore un »), et de 3 (« trois, c'est un et encore un et encore un »).
— Verbaliser la décomposition de 3 permettant de distinguer les quantités 2 et 3 (« trois, c'est deux et encore un »).

Les types de situations et procédures sont les mêmes pour les quantités de 1 à 3. L'enseignant nomme les quantités en utilisant les itérations de 1 pour distinguer 1, 2 et 3.

Exemple :

« Il y a trois assiettes : une assiette et encore une assiette et encore une assiette, ça fait trois assiettes. »

L'enseignant verbalise la décomposition de 3 pour distinguer 2 et 3.

Exemple :

« Il y a trois assiettes : deux assiettes et encore une assiette, ça fait trois assiettes. »

ÉTAPE 3 : LES PROCÉDURES VISUELLES POUR COMPARER DES QUANTITÉS

Objectifs

— Comparer des quantités **sans faire intervenir la suite numérique orale**.
— Comprendre ce que signifient « plus que » et « moins que ».

Types de situations et procédures

— Comparer deux quantités de collections en se limitant à étudier s'il y en a autant dans chaque collection et en utilisant la perception visuelle due à la grande différence de quantités.

Exemple :

Matériel : 5 poupées d'un côté et 12 assiettes éloignées des poupées.

Tâche : dire s'il y a juste ce qu'il faut comme assiettes pour que chaque poupée ait une assiette et qu'il ne reste pas d'assiette. On n'a pas le droit de bouger les poupées ou les assiettes.

L'enseignant introduit les termes « **plus que** » et « **moins que** ».

« Il y a plus d'assiettes que de poupées, car quand on met une assiette à chaque poupée, il reste des assiettes. Il y a moins de poupées que d'assiettes. »

- Comparer deux quantités de collections en indiquant la plus grande ou la plus petite et en utilisant la perception visuelle due à la grande différence de quantités.

Exemple :

Matériel : 5 poupées d'un côté et 12 assiettes éloignées des poupées.

Tâche : dire s'il y a plus d'assiettes que de poupées ou plus de poupées que d'assiettes.

L'enseignant revient sur la signification des termes « plus que » et « moins que ».

- Comparer deux quantités de collections (les quantités ne dépassent pas 3) en indiquant la plus grande ou la plus petite et en utilisant la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 2 poupées d'un côté et 3 assiettes éloignées des poupées.

Tâche : dire s'il y plus d'assiettes que de poupées ou plus de poupées que d'assiettes.

L'enseignant verbalise les décompositions de 2 et 3 pour comparer les quantités. « Trois, c'est deux et encore un ; c'est plus grand que deux. »

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Formaliser l'utilisation des termes « plus que » et « moins que ».

ÉTAPE 4 : LA RECONNAISSANCE ET LA DÉSIGNATION DES QUANTITÉS DE 1 À 4 À PARTIR DE LA RECONNAISSANCE VISUELLE DES PETITES QUANTITÉS ET DES DÉCOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS

Objectifs

- Construire les quantités jusqu'à 4 sans faire intervenir la suite numérique orale.
- Comprendre les décompositions des nombres jusqu'à 4.
- Consolider la signification des termes « plus que » et « moins que ».

Types de situations et procédures

- Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée (jusqu'à 4) en s'appuyant sur la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 4 poupées et des assiettes (plus que 4). Les 4 poupées sont disposées de façon à faire apparaître soit la décomposition 1 et 3, soit la décomposition 2 et 2.

Tâche : mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.

- Comparer les quantités de plusieurs collections à une collection donnée (jusqu'à 4) en se limitant à déterminer celle où il y en a autant que dans la collection de référence, en s'appuyant sur la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 4 poupées, une boîte avec 1 assiette, une boîte avec 2 assiettes bien visibles, une boîte avec 3 assiettes bien visibles, une boîte avec 4 assiettes bien visibles. Les poupées et les assiettes sont disposées de façon à faire apparaître soit la décomposition 1 et 3, soit la décomposition 2 et 2.

Tâche : trouver la boîte d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette et qu'il ne reste pas d'assiette.

L'enseignant introduit le nombre 4 comme étant « trois et encore un » puis introduit la décomposition « quatre, c'est deux et encore deux ».

— Réaliser une collection dont la quantité est indiquée par l'enseignant (de 1 à 4) en s'appuyant sur la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : des assiettes (plus que 4).

Tâche : prendre 4 assiettes.

L'enseignant explicite les décompositions de 2, 3 et 4 : « Quatre, c'est trois et encore un ou deux et encore deux. »

— Comparer deux quantités de collections (les quantités ne dépassent pas 4) en indiquant la plus grande ou la plus petite et en utilisant la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 4 poupées d'un côté et 3 assiettes placées à distance des poupées.

Tâche : dire s'il y plus d'assiettes que de poupées ou plus de poupées que d'assiettes.

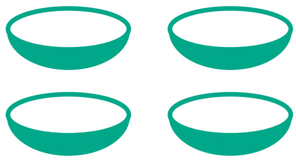
La décomposition mise en avant est celle qui permet de comparer les deux quantités.

Pour l'exemple ci-dessus, la décomposition de 4 comme étant « trois et encore un » permet de dire qu'il y a plus que 3.

— Indiquer la quantité d'une collection (jusqu'à 4) en s'appuyant sur la recomposition et la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Combien y a-t-il d'assiettes ?



Même si la quantité est reconnue directement sans recompositions, l'enseignant les explicite. Pour l'exemple ci-dessus : « Il y a deux assiettes et encore deux assiettes, ça fait quatre assiettes. »

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Introduire le nombre 4 à partir de la décomposition avec 1 et 3 puis avec celle de 2 et 2.

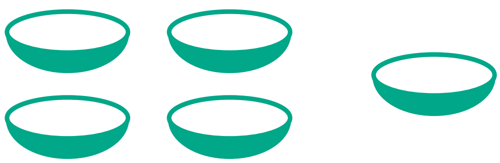
ÉTAPE 5 : LA RECONNAISSANCE ET LA DÉSIGNATION DES QUANTITÉS DE 1 À 6 À PARTIR DE LA RECONNAISSANCE VISUELLE DES PETITES QUANTITÉS ET DES DÉCOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS OU À PARTIR DES DISPOSITIONS EN CONSTELLATION

Objectifs

- Construire les quantités jusqu'à 6 sans faire intervenir la suite numérique orale.
- Comprendre les décompositions avec le nombre 1 des nombres jusqu'à 6 (exemple : « six, c'est cinq et encore un »).
- Commencer à reconnaître les quantités disposées comme les constellations du dé.
- Commencer à déterminer une quantité à partir d'une composition (exemples : « quatre et encore un, ça fait cinq » ; « quatre et encore deux, ça fait six »).

Les types de situations sont les mêmes qu'à l'étape précédente.

Exemple de disposition pour cinq assiettes :



Exemple de disposition pour six assiettes :

Dans un premier temps, les collections de quantités 5 et 6 sont disposées de façon à faire apparaître l'ajout d'un élément au nombre précédent.

L'enseignant introduit les nombres 5 et 6 comme étant respectivement « quatre et encore un » et « quatre et encore un et encore un » ou « cinq et encore un ».

Les dispositions en constellations du dé sont introduites. La quantité est toujours déterminée à partir des décompositions. La constellation du 5 peut être explicitée à partir de la décomposition de 4 et 1 et la constellation du 6 avec soit la décomposition de 4 et 1 et 1, soit de 5 et 1. L'objectif est d'arriver, au fil des séances, à une reconnaissance immédiate des quantités lorsque les collections ont cette disposition.

Au fil des séances, d'autres décompositions peuvent être introduites. Pour l'exemple de six assiettes ci-dessus, après avoir explicité la quantité six comme étant « quatre et encore un et encore un », la décomposition de six comme étant « quatre et deux » est verbalisée.

Les recompositions sont explicitées pour déterminer la quantité d'une collection dans laquelle deux sous-collections sont bien visibles. Dans l'exemple de six assiettes, la quantité 6 est trouvée à partir de la recomposition de 5 et 1 ou 4 et 2.

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

— Formaliser l'introduction des nombres 5 et 6 à partir des décompositions avec 1 : « cinq, c'est quatre et encore un », « six, c'est quatre et encore un et encore un, c'est cinq et encore un ».
— Introduire d'autres décompositions comme « six, c'est trois et encore trois ».
— Verbaliser les recompositions qui permettent de déterminer des quantités.

ÉTAPE 6 : LA DÉSIGNATION DES QUANTITÉS JUSQU'À 6 EN COMPTANT DE UN EN UN ET EN S'APPUYANT SUR LES DÉCOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS

Objectifs

— Comprendre l'utilisation de la suite numérique orale pour désigner les quantités jusqu'à 6.
— Comprendre que, dans la suite numérique orale, le nombre qui suit un autre correspond à la quantité précédente en ajoutant une unité.

Pour comprendre l'utilisation de la suite numérique orale servant à déterminer la quantité d'une collection, il est nécessaire de savoir déjà dire cette quantité en utilisant les décompositions et la perception visuelle des petites quantités. Il faut aussi connaître la suite numérique orale au moins jusqu'au nombre désignant la quantité.

Les types de situations à proposer sont les mêmes qu'à l'étape précédente.

Lors des premières séances, c'est l'enseignant qui explicite l'utilisation de la suite numérique orale après que les élèves ont trouvé la quantité avec une autre procédure.

Exemple :

Les élèves ont déterminé que la collection ci-dessous contient 4 assiettes à partir de la disposition en sachant que « trois et encore un, ça fait quatre ».

L'enseignant valide ces procédures puis explicite le comptage de un en un en prenant soin de désigner la sous-collection qui correspond au nombre indiqué.

L'enseignant compte « un » en montrant une assiette, « deux » en montrant deux assiettes et ainsi de suite.

Cette procédure de comptage de un en un avec la suite numérique orale est utilisée plusieurs fois par l'enseignant avant d'être demandée aux élèves.

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Introduire l'utilisation de la suite orale des nombres pour désigner une quantité, puis consolider cette utilisation.

ÉTAPE 7 : LA DÉSIGNATION DES QUANTITÉS JUSQU'À 10 EN COMPTANT DE UN EN UN ET EN DÉCOUVRANT QUELQUES DÉCOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS

Aucune étude n'indique qu'un élève ayant acquis le nombre 5 pourrait se trouver en difficulté pour construire le reste des quantités. La consolidation jusqu'à 10 (objectif de fin de l'école maternelle) se fait de la même manière que précédemment.

ÉTAPE 8 : LES QUANTITÉS AU-DELÀ DE 10

Les compétences à faire acquérir à tous les élèves en fin de cycle 1 se limitent aux quantités jusqu'à 10. Cependant, les élèves doivent aussi maîtriser la comptine numérique jusqu'à 30 et, dans le cadre de la mémorisation de cette comptine, ils seront amenés à compter des éléments de collections ayant un cardinal supérieur à 10. Les décompositions et recompositions à expliciter et à utiliser pour les nombres au-delà de 10 sont prioritairement celles faisant intervenir le nombre 10. Exemple : « douze, c'est dix et deux » ou inversement « dix et deux, ça fait douze ».

Les écritures chiffrées des nombres

L'écriture chiffrée d'un nombre est un symbole qui, quand on le connaît, permet de garder la mémoire de la quantité. C'est donc un écrit du même type que le langage écrit. Les recommandations du programme à propos du langage écrit s'appliquent aussi pour l'écriture chiffrée des nombres.

« La langue écrite : lue par l'adulte, présentée aux enfants et explicitée progressivement jusqu'à ce qu'ils commencent à l'utiliser, les familiarise avec une forme de communication dont ils découvrent peu à peu les spécificités et le rôle pour garder trace, réfléchir, anticiper, s'adresser à un destinataire absent.

[...] L'objectif est de permettre aux enfants de comprendre que les signes écrits qu'ils perçoivent valent du langage : en réception, l'écrit donne accès à la parole de quelqu'un et, en production, il permet de s'adresser à quelqu'un qui est absent ou de garder pour soi une trace de ce qui ne saurait être oublié.

[...] C'est l'enseignant qui juge du moment où les enfants sont prêts à prendre en charge eux-mêmes une partie des activités que les adultes mènent avec l'écrit[75]. »

Les écritures chiffrées sont présentées par l'enseignant lorsque les quantités qu'elles représentent peuvent déjà être désignées oralement par les élèves. Elles doivent apparaître comme un moyen de garder en mémoire ces quantités. Comme pour le langage écrit, l'écriture des chiffres par les élèves eux-mêmes ne s'effectue

75 — BOENJ n° 25 du 24 juin 2021 : https://cache.media.education.gouv.fr/file/25/86/5/ensel550_annexe_1413865.pdf.

que lorsqu'ils sont capables de les décoder, c'est-à-dire de traduire les écritures chiffrées en désignation orale.

Trois types de situations font intervenir l'écriture chiffrée :

— réaliser une collection dont la quantité est indiquée par l'écriture chiffrée ;
— indiquer, par une écriture chiffrée, la quantité d'une collection ;
— comparer deux quantités données par leurs écritures chiffrées.

Elles sont à proposer aux élèves qui savent déjà résoudre ces situations lorsqu'elles font intervenir la désignation orale des nombres. Ainsi, à la fin de l'étape 6 explicitée précédemment, des situations faisant intervenir les écritures chiffrées des nombres de 1 à 6 peuvent être proposées aux élèves qui savent résoudre les situations décrites dans cette étape.

Programmation de l'enseignement de la fonction ordinale des nombres

Deux types de situations sont cités dans les compétences attendues des enfants en fin d'école maternelle : exprimer la position d'un objet ou d'une personne et comparer des positions. Dans les deux cas, la collection d'éléments n'est pas du même type que celle faisant intervenir le nombre en tant que quantité. Les procédures sont différentes. La collection est organisée en une suite d'éléments avec une origine et un sens qu'il faut prendre en compte. Par exemple, dire que la lettre C est en deuxième position dans le mot ÉCOLE est correct si on prend comme sens celui de la lecture en commençant par la lettre É.

Les mots désignant des positions n'étant pas les mêmes que ceux utilisés pour désigner des quantités, il est nécessaire de les connaître. Il faut donc que les enfants apprennent la suite numérique orale des nombres ordinaux. Pour désigner la position de la lettre L dans le mot ÉCOLE en prenant le sens de la lecture, on peut soit compter de un en un (comptage-énumération) les lettres avec la suite numérique orale des nombres ordinaux (première lettre, deuxième lettre, etc.), soit compter le nombre de lettres avant la lettre L en utilisant la suite numérique orale des nombres cardinaux puis savoir que la position de l'élément suivant le groupe de trois éléments s'appelle « quatrième ». Il est donc nécessaire d'avoir déjà compris le nombre en tant que **quantité** avant d'aborder le nombre en tant que **position**.

La comparaison de positions nécessite de savoir désigner les positions. Aussi ce type de situations intervient-il lorsque cette dernière compétence est acquise.

Beaucoup de situations ordinaires de vie de classe permettent de convoquer le nombre en tant que position, mais il est nécessaire de proposer des situations spécifiques (voir les exemples de situation en partie 2 et celui du jeu de piste dans cette partie).

Programmation de l'enseignement de la résolution de problèmes

Les problèmes numériques évoqués dans le programme portent sur des nombres en tant que quantité (composition de deux collections, ajout ou retrait à une collection, produit ou partage) ou sur des nombres en tant que position (déplacements en avant ou en arrière).

Un problème arithmétique met en jeu plusieurs nombres portant sur des quantités ou sur des positions. Il est nécessaire d'avoir déjà acquis l'utilisation de ces nombres en tant que quantité ou position avant de proposer le problème arithmétique. Par exemple, le problème consistant à trouver la quantité totale de deux collections de quantités respectives 3 et 1 peut être proposé aux élèves ayant déjà acquis une procédure permettant de déterminer les quantités jusqu'à 4.

Au cycle 1, il n'est pas attendu des élèves qu'ils utilisent les opérations et le langage mathématique « plus, moins, égal ».

Trois critères sont à prendre en compte pour prévoir la programmation dans la résolution des problèmes arithmétiques : le type de problèmes, les quantités mises en jeu par le problème (elles doivent aller jusqu'à 10 en fin de maternelle, et peuvent être supérieures avec certains élèves) et le matériel à disposition.

Les types de problèmes et les quantités en jeu

- Les problèmes les plus faciles sont les problèmes de recherche de la quantité totale dans un problème de réunion de quantités ou de recherche de la quantité finale pour un ajout à une quantité. Ces problèmes peuvent être proposés dès que les élèves sont capables de déterminer les quantités impliquées dans le problème.

Exemple : « Une boîte contient deux bouchons. J'ajoute un bouchon. Combien y a-t-il de bouchons dans la boîte maintenant ? » Ce problème peut être proposé aux élèves sachant déterminer les quantités jusqu'à 3 (à la fin de l'étape 2 du nombre en tant que quantité).

- Les problèmes de recherche d'une des quantités dans une réunion de quantités ou de recherche de la quantité finale pour un retrait d'une quantité présentent plus de difficultés que ceux dont un exemple est proposé ci-dessus. Ils sont donc à proposer lorsque l'élève est capable de résoudre les précédents.
- Viennent ensuite les problèmes de groupements ou de partage.

Exemple de problème de groupement : « J'ai six crayons. Je les range par paquets de deux. Combien cela me fait-il de paquets ? »

Exemple de problème de partage : « J'ai six perles. Je veux faire deux bracelets. Je veux que les deux bracelets aient le même nombre de perles. Combien y aura-t-il de perles dans chaque bracelet ? »

Le matériel à disposition

La difficulté de résolution d'un même problème dépend du fait de pouvoir utiliser ou non du matériel pour représenter les quantités et réaliser l'action du problème. Au cours du cycle 1, l'utilisation du matériel évolue et 4 étapes peuvent être définies.

ÉTAPE 1 : L'ENSEIGNANT UTILISE DU MATÉRIEL VISIBLE

Objectif : il n'est pas encore de résoudre un problème puisque la résolution est prise en charge par l'enseignant. Cette étape sert à familiariser l'élève avec une situation de composition de collections, de transformation d'une collection, de groupement de collections ou de partage d'une collection.

L'enseignant énonce le problème en réalisant l'action au fur et à mesure avec du matériel visible. La quantité correspondant au résultat est visible. Les élèves utilisent une des procédures qu'ils connaissent pour déterminer le résultat. Les procédures possibles dépendent des quantités en jeu.

EXEMPLE 1 POUR DES ÉLÈVES AYANT ACQUIS LE NOMBRE EN TANT QUE QUANTITÉ JUSQU'À 3

Matériel : des images de pommes, une image de panier.

Énoncé du problème et action de l'enseignant : « J'ai deux pommes dans mon panier. » L'enseignant montre les deux images de pommes posées dans l'image du panier. Il explicite la quantité « une pomme et encore une pomme, deux pommes dans mon panier ». « J'ajoute une pomme. » L'enseignant ajoute une image de pomme et montre l'image du panier avec l'ensemble des images de pommes. « Maintenant, combien y a-t-il de pommes dans mon panier ? »

La quantité finale ne dépassant pas 3, les élèves peuvent la déterminer en la reconnaissant visuellement. L'enseignant valide la réponse en énonçant la recomposition effectuée : « Deux pommes et encore une pomme, ça fait trois pommes. »

EXEMPLE 2 POUR DES ÉLÈVES MAÎTRISANT LES NOMBRES AU-DELÀ DE 5

L'exemple reprend le précédent. Le panier contient quatre pommes et on ajoute trois pommes. Les élèves peuvent déterminer la quantité finale par comptage de un en un ou à partir de la recomposition de 4 et 3 s'ils la connaissent. Ces procédures sont explicitées par l'enseignant.

Pour la validation, les images de pommes peuvent être disposées pour faire apparaître la constellation 6 et une pomme à côté. Le résultat est « six et encore un, ça fait sept ».

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Expliciter les recompositions ou décompositions qui permettent de trouver le résultat.

ÉTAPE 2 : LES ÉLÈVES DISPOSENT D'OBJETS CORRESPONDANT AU CONTEXTE DU PROBLÈME

Objectif : comprendre un énoncé de problème en étant capable de réaliser l'action décrite par l'énoncé.

Les élèves disposent des objets correspondant au contexte du problème en plus grand nombre que nécessaire. L'enseignant énonce le problème et les élèves réalisent l'action au fur et à mesure avec le matériel. Grâce à leur action, la quantité correspondant au résultat est visible. Les élèves utilisent une des procédures qu'ils connaissent pour déterminer le résultat.

Exemple pour des élèves ayant acquis le nombre en tant que quantité jusqu'à 4 :

> Matériel : des images de pommes, une image de panier.
>
> Problème énoncé par l'enseignant : « Dans ton panier, il y a trois pommes. Tu ajoutes une pomme dans ton panier. Maintenant, combien y a-t-il de pommes dans ton panier ? »
>
> Il est attendu que les élèves exécutent l'action au fur et à mesure. Ils placent trois images de pommes puis en ajoutent une. Ils peuvent trouver la quantité finale soit en reconnaissant la quantité 4 visuellement, soit en sachant que « trois et un, ça fait quatre », soit en comptant de un en un, si cette procédure a déjà été travaillée, mais ce n'est pas un prérequis indispensable.

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Expliciter les recompositions ou décompositions qui permettent de trouver le résultat.

ÉTAPE 3 : LES ÉLÈVES DISPOSENT D'OBJETS SYMBOLIQUES

Objectif : comprendre qu'on peut remplacer les objets du contexte du problème par d'autres objets plus symboliques comme des cubes ou des jetons.

Les élèves disposent d'objets qui ne sont pas ceux du contexte du problème, mais qui permettent de symboliser les objets du problème (cubes ou jetons). L'enseignant énonce le problème et les élèves réalisent l'action au fur et à mesure avec le matériel. Grâce à leur action, la quantité correspondant au résultat est visible. Les élèves utilisent une des procédures qu'ils connaissent pour déterminer le résultat.

EXEMPLE 1 : MÊME EXEMPLE QUE PRÉCÉDEMMENT, MAIS LES ÉLÈVES NE DISPOSENT QUE DE CUBES

EXEMPLE 2 POUR DES ÉLÈVES AYANT ACQUIS LE NOMBRE EN TANT QUE QUANTITÉ AU-DELÀ DE 5

Les élèves disposent de cubes pour illustrer le problème suivant : « Le panier contient six pommes et on ajoute deux pommes. » Les élèves peuvent déterminer la quantité finale soit par comptage de un en un, soit à partir de la recomposition de 6 et 2 s'ils la connaissent, soit par surcomptage. Cette dernière procédure nécessite de savoir dire la suite numérique orale en commençant par un nombre différent de 1. Ces procédures sont explicitées par l'enseignant.

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

— Rappeler les recompositions.
— Expliciter le surcomptage lorsque cette procédure permet de résoudre le problème.

ÉTAPE 4 : LES ÉLÈVES NE DISPOSENT PAS D'OBJETS MANIPULABLES

Objectif : comprendre qu'à défaut d'objets, on peut utiliser ses doigts ou un dessin.

L'enseignant réalise l'action avec du matériel visible en énonçant le problème, mais la quantité correspondant au résultat n'est pas visible. Les élèves ne disposent pas d'objets manipulables. Sans matériel, la procédure visée est l'utilisation des doigts. Une feuille et un crayon peuvent être proposés pour amener les élèves à représenter la situation afin de déterminer le résultat en utilisant une des procédures qu'ils connaissent.

EXEMPLE POUR DES ÉLÈVES AYANT ACQUIS LE NOMBRE
EN TANT QUE QUANTITÉ JUSQU'À 8 AU MOINS

Les élèves ne disposent d'aucun matériel. L'enseignant montre le panier contenant quatre pommes. Ensuite, il dit qu'il ajoute trois pommes. Il montre ces trois pommes, mais il cache ensuite le panier avec toutes les pommes, ce qui empêche de déterminer la quantité finale par comptage de un en un. L'élève peut s'aider de ses doigts pour représenter les quantités. La quantité finale peut être trouvée en comptant de un en un le total de doigts, en surcomptant de 3 à partir de 4 ou avec la recomposition de 4 et 3. Ces procédures sont explicitées par l'enseignant.

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

— Rappeler les recompositions.
— Expliciter le surcomptage lorsque cette procédure permet de résoudre le problème.

Comment enseigner les mathématiques en articulant les quatre modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle ?

Le programme de l'école maternelle précise que « l'enseignant met en place dans sa classe des situations d'apprentissage variées structurées autour d'un objectif pédagogique précis [...] les choisit selon les besoins du groupe classe et ceux de chaque enfant »[76]. Dans ce but, il mobilise et articule les quatre modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle :

- apprendre en jouant ;
- apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes concrets ;
- apprendre en s'exerçant ;
- apprendre en se remémorant et en mémorisant.

Pour l'enseignant, l'enjeu est de réussir à trouver un équilibre et une articulation entre ces quatre modalités d'apprentissage en fonction de l'âge des élèves, de leurs capacités et de leurs centres d'intérêt.

Les quatre modalités d'apprentissage peuvent se recouper, se superposer, se succéder au cours d'une même séquence d'apprentissage. Il est donc important de ne pas organiser ces quatre modalités de façon cloisonnée. Ainsi, par exemple, le jeu de la bataille par sa répétition constitue une condition d'exercice de la compétence « Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités ». Dans ce jeu, les modalités « apprendre en jouant » et « apprendre en s'exerçant » sont donc mobilisées en même temps pour renforcer les apprentissages des élèves. Le jeu peut également permettre de proposer des situations d'évaluation des acquis des élèves.

Le jeu de la bataille permet aux élèves de s'exercer à utiliser le nombre pour comparer des quantités.

76 — BOENJ n° 25 du 24 juin 2021 : https://eduscol.education.fr/document/20062/download.

Privilégier le jeu : apprendre en jouant

Les activités ludiques visent des apprentissages identifiés et précis. Le recours à ces jeux est une modalité pédagogique adaptée à la diversité des élèves de maternelle et qui permet une mise en œuvre progressive des apprentissages.

Les jeux symboliques

De la petite à la grande section, les jeux symboliques (par exemple, jeux dans l'espace garage ou dans l'espace cuisine) offrent la possibilité d'introduire et de renforcer de nombreux apprentissages mathématiques (comparer des collections, réaliser une collection de mêmes cardinaux qu'une autre, résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait, de partage, etc.). L'enseignant, à partir d'une observation des élèves en situation de jeu, saisit et met à profit les découvertes incidentes pour les transformer en apprentissages structurés.

— Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée par perception visuelle des petites quantités.

Exemples :

Mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.

Mettre juste ce qu'il faut comme cuillères pour qu'il y ait une cuillère par poupée.

— Réaliser une collection dont la quantité est donnée oralement ou par écrit.

Exemples :

Jouer à aller chercher le nombre d'animaux commandés oralement, puis par écrit.

Dans l'espace cuisine, réaliser les collections d'aliments commandées oralement, puis par écrit.

Exemples d'apprentissages mathématiques consolidés au cours des jeux symboliques en petite section

Dans une classe de petite section, des jeux dans l'espace garage avec des véhicules de toutes sortes sont proposés de nombreuses fois au cours de l'année.

L'enseignant donne une place importante à l'observation et à l'imitation des autres enfants et de l'adulte. Il observe les élèves dans leur jeu libre afin de mieux les connaître, de relancer leur activité à partir de leurs découvertes, mais aussi d'observer leur niveau d'acquisition[77].

Il introduit les nombres de 1 à 4 dans l'ordre et sans utiliser la suite orale des nombres. Lorsqu'il joue dans l'espace garage avec les élèves et qu'il veut prendre trois véhicules, il utilise les gestes professionnels qui mettent en scène l'itération de l'unité et les décompositions additives des nombres jusqu'à 4 :

— pour prendre une collection de deux voitures, il annonce « deux » à haute voix, montre le nombre deux avec les doigts de la main, puis pioche en faisant la correspondance terme à terme entre les doigts et les voitures. Il utilise un geste de la main pour expliciter aux élèves que le mot « deux » désigne la collection de voitures ;
— il déplace les voitures une à une en théâtralisant l'itération de l'unité « deux voitures, c'est une voiture et encore une voiture ». Il demande ensuite aux élèves de lui donner « deux voitures, une voiture et encore une voiture ». Il explicite que « deux, c'est un et encore un » ;
— il reproduit ce procédé lorsqu'il prend trois voitures : « trois voitures, c'est une voiture et encore une voiture et encore une voiture », puis, en utilisant la décomposition, « trois voitures, c'est deux voitures et encore une voiture ».

Ces élèves de petite section jouent à produire les collections d'une puis deux voitures. Sollicités par l'enseignant, ils constituent ensuite des collections de trois puis quatre voitures. Ils commencent à comprendre que, lorsqu'ils ont trois voitures, il suffit d'ajouter une voiture pour obtenir une collection de quatre voitures ou de retirer une voiture pour avoir une collection de deux voitures.

RÉALISATION DE COLLECTIONS ÉQUIPOTENTES

L'introduction de figurines d'oursons permet aux élèves de se confronter à un nouveau problème. Ils doivent chercher juste ce qu'il faut de voitures pour que chaque ourson ait une voiture.

77 — Des critères d'évaluation sont proposés sur la page Éduscol « Acquérir les premiers outils mathématiques » : https://eduscol.education.fr/2819/acquerir-les-premiers-outils-mathematiques-cycle-1.

COMPARAISON DE COLLECTIONS DE VÉHICULES

Par ses interventions, l'enseignant relance l'activité en amenant progressivement les élèves à comparer les quantités de deux collections, une collection d'oursons et une collection de voitures (ou deux collections de véhicules). La validation est effectuée en utilisant la correspondance terme à terme. Ces comparaisons conduisent les élèves à échanger et à apprendre un vocabulaire et une syntaxe spécifiques. L'enseignant accompagne chaque élève dans ses premiers essais, se montre désireux de mieux le comprendre en posant des questions ouvertes, en demandant des précisions et en l'invitant à reformuler son propos. Il reprend ses productions orales pour lui apporter des mots ou des structures de phrases plus adaptés qui l'aident à progresser. Par exemple :

- « Il y a plus d'oursons que de voitures. » ;
- « Il y a moins de voitures que d'oursons. » ;
- « Il y a autant (ou la même quantité) d'oursons que de camions. »

COMPARAISON DE COLLECTIONS

Les activités de comparaison de collections conduisent à ordonner les collections de voitures et d'oursons selon leur quantité. Chaque collection est placée dans une boîte. Les boîtes sont ordonnées en fonction de la quantité d'objets qu'elles contiennent.

Concevoir une programmation de jeux impliquant des nombres

L'organisation des jeux se pense dans le cadre d'une réflexion d'équipe avec un choix de jeux de référence (exemples : jeu de l'oie, jeu du gobelet, jeu de la boîte, Greli-Grelo, bataille, Halli-Galli, Memory, loto) qui reflète une progression et une programmation tout au long du cycle en fonction des apprentissages mathématiques visés. Les progrès des élèves en mathématiques ne sont pas corrélés au nombre de jeux utilisés. Plutôt que de multiplier l'utilisation de jeux différents, il est préférable de faire évoluer un jeu connu des élèves en jouant sur les variables didactiques avec l'objectif de découvrir ou de renforcer une procédure précise.

UN EXEMPLE DE JEU DE RÉFÉRENCE : LE JEU DE L'OIE

Les jeux de déplacement sur piste du type « jeu de l'oie » permettent aux élèves de faire le lien entre nombres et espace. Des parcours rectilignes avec des cases numérotées et de même taille sont à privilégier.

Dans une note de février 2022[78], le Conseil scientifique de l'éducation nationale précise que la recherche montre que, dès l'école maternelle, ce type de supports « aide notamment les élèves à comprendre que tous les nombres entiers 1, 2, 3... sont ordonnés et également espacés (acquisition d'une représentation linéaire des quantités) ; que plus le nombre est grand, plus il se situe vers la droite ; et qu'additionner ou soustraire correspondent à des déplacements à droite ou à gauche sur cette bande numérique. Les jeux de plateau, type "jeu de l'oie" ou "petits chevaux", où l'on avance un personnage dans l'espace, d'un nombre de cases correspondant à

78 — Note du Conseil scientifique de l'éducation nationale, février 2022, n° 5.

un coup de dés, facilitent la compréhension de la bande numérique. Les enfants qui y jouent progressent plus vite que les autres en mathématiques ».

Le moment de l'accueil facilite la mise en œuvre de jeux en relation duelle entre élèves ou avec l'enseignant. Un parcours avec un nombre limité de cases permet de limiter la durée des parties à 5-10 minutes, ce qui motive les élèves à rejouer et facilite l'organisation des temps de jeu.

CONCEPTION DU JEU

— Un parcours rectiligne plutôt que tordu.
— Des cases toutes de même taille avec les nombres dans l'ordre dans chacune des cases.
— Des cases bonus ou pénalités en lien avec les nombres (avancer de deux cases, reculer de trois cases, etc.) sont introduites progressivement pour relancer l'intérêt du jeu.
— Un dé puis deux dés adaptés.

VARIABLES DIDACTIQUES

Types de dés utilisés :

— deux dés avec constellations permettent de compter les points de chaque dé et les points de l'ensemble (introduction des recompositions) ;
— un dé avec des chiffres et un dé avec des constellations permettent de travailler les recompositions et le surcomptage ;
— deux dés avec des chiffres permettent d'encourager les recompositions s'appuyant sur la mémoire avec vérification éventuelle avec les doigts.

Jeu avec un dé pointé et un dé chiffré.

Quantités en jeu : dés pointés avec uniquement des constellations de 1 ou 2 points, 1 à 3 points, 1 à 5 points et des dés chiffrés adaptés aux connaissances des élèves.

Taille de la piste : elle dépend de la taille des nombres travaillés et de la règle du jeu (par exemple : pour gagner, un pion doit-il dépasser la case d'arrivée ou arriver exactement sur cette case ?).

PROGRESSION POUR LE CYCLE 1

À chaque étape de la progression, on modifie les informations portées sur les dés pour contraindre l'élève à faire évoluer ses procédures. Le jeu avec deux dés est plus intéressant en mathématiques, car il permet de renforcer la connaissance des décompositions et des recompositions des nombres que les élèves ont déjà travaillées. La procédure de surcomptage est également explicitée et consolidée en utilisant deux dés.

Jeu avec	Objectifs	PS	MS	GS
un dé pointé (en constellation)	Associer une quantité de points et un déplacement.	x		
un dé chiffré	Associer une écriture chiffrée à une quantité et à un déplacement.		x	
deux dés pointés	Dénombrer, surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus.	x	x	x
un dé pointé et un dé chiffré	Surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus.		x	x
deux dés chiffrés	Surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus. Utiliser les mémorisations : « Quatre et deux, ça fait six. »			x

VERBALISATION

Durant la partie, après chaque jet de dé, l'élève verbalise la quantité de points obtenus, la case de départ, les numéros des cases parcourues par son pion et le numéro de la case d'arrivée. L'enseignant reformule et structure autant que besoin.

Exemple : « je suis sur la case 2 » ; « j'ai fait 3 » (l'élève déplace son pion en oralisant 1, 2, 3) ; « j'arrive sur la case 5 ».

ARRÊTS SUR IMAGE

Une fois que les élèves se sont bien approprié le jeu, l'enseignant propose des arrêts sur image pour amener les élèves à anticiper un déplacement : « Tu es sur la case 2, tu as fait 3. Sur quelle case penses-tu que tu vas arriver ? »

Verbalisation de l'élève : « je suis sur la case 2 » ; « j'ai fait 3 » ; « je pense que je vais arriver sur la case 5 ».

Les élèves commencent à repérer et à verbaliser que « faire 3 et 2, c'est la même chose que faire 2 et 3 » ; « on peut changer l'ordre des nombres, mais on arrive sur la même case ». Ils vérifient cette affirmation en effectuant successivement les deux transformations : un déplacement de 3 puis de 2 comparé avec un déplacement de 2 puis de 3.

JEU ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Le jeu devient également support de résolution de petits problèmes.

Exemples de problèmes proposés :

— Problèmes d'ajout ou de retrait avec recherche de l'état final :

  « Zoé joue au jeu de l'oie. Son pion est sur la case 5. Elle lance le dé et fait 4. Sur quelle case son pion va-t-il arriver ? »

  « Samir joue au jeu de l'oie, son pion est sur la case 7. Il doit reculer de 2 cases. Sur quelle case son pion va-t-il arriver ? »

— Problèmes d'ajout ou de retrait avec recherche de la transformation :

« Bintou était sur la case 3, elle a lancé le dé et est arrivée sur la case 5. Combien de points avait-elle obtenu avec le dé ? »

JOUER AVEC LES ÉLÈVES : UN GESTE PROFESSIONNEL FONDAMENTAL

Il est très important que l'enseignant joue fréquemment avec ses élèves et qu'il s'assure des conditions pour garantir à chaque élève suffisamment de temps pour jouer. Le moment de l'accueil est un terrain fertile pour proposer des jeux impliquant les nombres. Le jeu en relation duelle participe à la mise en confiance de l'élève fragile avec une reprise des jeux proposée à l'ensemble du groupe.

La posture de l'enseignant oscille entre participation, retrait et observation. Plus disponible, le professeur questionne chaque élève sur les procédures qu'il a mises en place pour réussir le jeu, les connaissances qu'il a mobilisées pour résoudre un problème. Le jeu a la vertu de faire évoluer le statut de l'erreur – perdre est différent d'être en échec face à un exercice, ce qui pousse l'élève à prendre plus de risques et à avoir moins peur de se tromper.

Apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes

Le sens que les élèves attribuent aux nombres constitue un enjeu essentiel des situations d'enseignement mises en œuvre à l'école maternelle. L'objectif est d'amener les élèves à comprendre que les nombres sont un outil performant pour résoudre des problèmes. Les élèves vivent ainsi un maximum d'expériences concrètes.

Les situations proposées sont construites de manière à faire apparaître le nombre comme utile pour exprimer des quantités, pour désigner un rang ou une position, pour anticiper le résultat d'une action sur des quantités (augmentation, diminution, réunion, distribution, partage) ou sur des positions (déplacements en avant ou en arrière). Il peut s'agir, par exemple, de réaliser une collection de quantité identique à celle d'une collection donnée, de trouver le nombre nécessaire d'objets pour compléter une collection (par exemple, dans le jeu de la marchande : « j'en veux huit et, pour l'instant, j'en ai deux »), de trouver une quantité d'objets après l'évolution d'une collection par ajout ou retrait d'une petite quantité d'objets, de réaliser le partage équitable d'une collection.

Apprendre en s'exerçant

S'exercer est une modalité incontournable de l'apprentissage pour acquérir les automatismes et fixer les savoirs dans la mémoire. Il s'agit de reprendre une activité de classe qui n'est pas encore maîtrisée en proposant un entraînement systématique dans un contexte sécurisé. Dans tous les cas, les situations de jeu et de manipulation sont à privilégier.

Exemples de jeux pour apprendre en s'exerçant

- Matériel d'auto-entraînement pour s'entraîner à associer un code symbolique à une quantité.
- Un jeu de Memory où il faut composer le nombre 10 en associant deux nombres.
- Le nombre mystère : le but du jeu est de placer les nombres de 1 à 9 sur une grille de neuf cases en tenant compte de huit indices. Ces derniers sont donnés par huit dessins représentant des quantités. Il faut placer une étiquette-nombre sur chacun des huit dessins en justifiant son choix. Le nombre-mystère est l'étiquette-nombre restante. Elle est placée sur la case du point d'interrogation.

Grâce à l'entraînement, l'élève progresse, acquiert aisance et rapidité dans la réalisation des tâches, ce qui libère des ressources cognitives pour réaliser des tâches plus complexes. À l'école maternelle, il faut veiller à la répétition et à la reprise de situations de jeux semblables pour une meilleure stabilisation des connaissances et des procédures.

Par automatisme, on entend les procédures mémorisées que l'élève peut mobiliser sans avoir à les reconstruire. Par exemple, un élève a automatisé la procédure de surcomptage sur les doigts : « Pour faire 4 et 3, je mets 4 dans ma tête et, sur mes doigts, je fais 5, 6, 7. » Ces automatismes sont nécessaires, mais peuvent aussi provoquer des obstacles à l'apprentissage quand la technique apprise n'est qu'une astuce dont l'élève n'a pas compris le sens. (cf. paragraphe « Enseigner le passage de la quantité au nombre »).

Apprendre en se remémorant, en mémorisant

De façon transversale, la mémorisation est nécessaire dans la grande majorité des activités proposées aux élèves de l'école maternelle.

Le jeu de Lucky Luke[79] : retrouver rapidement une façon de montrer 7 en utilisant simultanément les deux mains.

« Les opérations mentales de mémorisation chez les jeunes enfants ne sont pas volontaires. Dès la première année de vie, les enfants s'appuient fortement sur ce qu'ils perçoivent de leur environnement. Le langage qu'ils entendent aide à l'apprentissage et joue un rôle fondamental dans les opérations de mémorisation. L'enseignant s'exprime dans une langue riche et claire, il s'attache à donner des informations explicites pour permettre aux enfants de se les remémorer. Il organise des retours réguliers sur les découvertes et acquisitions antérieures pour s'assurer de leur stabilisation, et ceci dans tous les domaines. Engager la classe dans l'activité est l'occasion d'un rappel de

79 — Situation de mémorisation présentée page 89.

connaissances antérieures sur lesquelles s'appuyer, de mises en relation avec des situations différentes déjà rencontrées ou de problèmes similaires posés au groupe. L'enseignant anime des moments qui ont clairement la fonction de faire apprendre, notamment avec des comptines, des chansons ou des poèmes. Il valorise la restitution, l'évocation de ce qui a été mémorisé ; il aide les enfants à prendre conscience qu'apprendre à l'école, c'est remobiliser en permanance les acquis antérieurs pour aller plus loin[80]. »

80 — Extrait du BOEN n° 25 du 24 juin 2021 : https://cache.media.education.gouv.fr/file/25/86/5/ensel550_annexe_1413865.pdf.

Focus | Comment mobiliser des activités ritualisées qui évoluent dans le temps au service des apprentissages mathématiques ?

Une activité ritualisée est une activité proposée régulièrement aux élèves pendant une période de l'année. Elle est **en lien avec une séquence d'apprentissage**, avec des séances au cours desquelles les élèves ont manipulé le matériel, ont expérimenté des procédures, les ont verbalisées, etc.

Les activités ritualisées peuvent intervenir à différents moments de la séquence. Il va s'agir d'ancrer les apprentissages **par la répétition, l'automatisation**.

La répétition des activités ritualisées permet à tous les élèves de comprendre le but de la tâche et, ainsi, de s'engager rapidement dans la résolution du problème. L'activité ritualisée permet à l'enseignant de proposer des situations s'appuyant sur les modalités d'apprentissage de l'école maternelle ; notamment apprendre en s'exerçant et apprendre en se remémorant et en mémorisant.

Pour qu'elle serve aux apprentissages sur le nombre, elle doit **s'inscrire dans la progression** suivie, ce qui signifie qu'elle doit **varier et évoluer** au cours de l'année.

Les activités ritualisées se déroulent **en collectif**. Il faut donc veiller à ce qu'elles concernent **tous les élèves**. Ceux-ci doivent **tous** être impliqués dans la réalisation de la tâche. Lorsque **tous** les élèves réussissent **systématiquement** l'activité, il n'est plus intéressant de la proposer. Il faut l'abandonner ou la faire évoluer.

Dans la suite, nous proposons des exemples d'activités ritualisées en précisant à quel moment elles peuvent intervenir au cours de la programmation sur le nombre.

Exemple d'une activité ritualisée pour s'exercer aux objectifs de l'étape 4 du nombre en tant que quantité[81]

Objectif

Construire les quantités jusqu'à 4 **sans faire intervenir la suite numérique orale**. Comprendre les décompositions des nombres jusqu'à 4.

81 — Voir page 57.

Type de situation et procédures

Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée (jusqu'à 4) en s'appuyant sur la décomposition, la disposition et la perception visuelle des petites quantités.

Activité ritualisée : déterminer le nombre d'absents (lorsqu'il n'y a pas plus de quatre absents).

Matériel : les étiquettes des absents sont affichées au tableau. Chaque élève dispose de petites cartes reliées par un anneau (comme le montrent les photos ci-dessous).

Les cartes évoluent. Elles comportent soit des points disposés en constellations (photo 1), soit des points non disposés en constellations (photo 2), soit des doigts (photo 3).


Photo 1


Photo 2


Photo 3

Le placement des étiquettes des absents évolue aussi. Elles sont disposées soit comme les constellations, soit en faisant apparaître des décompositions comme 2 (disposé en constellation) et 1 pour 3 ou 3 (disposé en constellation) et 1 pour 4.

Tâche : l'élève doit trouver la carte qui correspond au nombre d'absents.

Validation : l'enseignant dispose des mêmes cartes que les élèves, mais en format agrandi pour qu'elles soient visibles par tous les élèves. Chaque carte choisie par les élèves est validée ou non par une correspondance terme à terme en plaçant chaque étiquette d'absent sur chaque point ou chaque doigt.

Verbalisation : le nombre d'absents est énoncé en indiquant une ou plusieurs décompositions de ce nombre. Exemple : « Il y a deux absents, un et encore un, ça fait deux absents. »

Variante : la gestion des cartes reliées par un anneau peut s'avérer difficile pour des élèves de petite section. Au lieu de fournir ce lot de cartes à chaque élève, on peut ne leur donner qu'une ou deux cartes en ne proposant pas les mêmes cartes à tous. Les élèves qui pensent avoir la carte correspondant au nombre d'absents lèvent cette carte.

Remarque : la possibilité de proposer cette activité au-delà de quatre absents dépend de la progression atteinte sur le nombre en tant que quantité. Il n'est pas recommandé de proposer une activité similaire sur le nombre de présents étant donné que ce nombre va au-delà des quantités travaillées à la maternelle.

Exemple d'une activité ritualisée pour s'exercer aux objectifs de l'étape 6 du nombre en tant que quantité[82]

Objectifs

— Comprendre l'utilisation de la suite numérique orale pour désigner les quantités jusqu'à 6.
— Comprendre que, dans la suite numérique orale, le nombre qui suit un autre correspond à la quantité précédente en ajoutant une unité.

Type de situation et procédures

Comparer deux quantités de collections (les quantités ne dépassent pas 6) en indiquant la plus grande ou la plus petite et en utilisant la décomposition et le comptage de un en un.

Activité ritualisée : déterminer s'il y a plus de pots de colle ou plus d'élèves qui devront s'en servir.

Matériel : l'enseignant dispose d'images de pots de colle et d'élèves assez grandes et pouvant être fixées au tableau. Il fixe d'un côté des images d'élèves et de l'autre des images de pots de colle. Les dispositions des images évoluent : elles peuvent être en constellations pour commencer, puis varier pour faire apparaître des compositions, comme 3 et 2 pour 5. Chaque élève dispose d'une image d'élève et d'une image de pot de colle.

Tâche : l'élève doit lever l'image qui correspond à l'objet en plus grand nombre (l'image d'élève s'il pense qu'il y a plus d'élèves que de pots de colle).

Validation : l'enseignant utilise la correspondance terme à terme en déplaçant chaque pot de colle près d'un élève.

Verbalisation : les nombres d'élèves et de pots de colle sont déterminés en comptant de un en un et en faisant apparaître à chaque nombre énoncé la quantité pour éviter le comptage-récitation. La comparaison est explicitée dans les deux sens, comme « il y a plus d'élèves que de pots de colle, il y a moins de pots de colle que d'élèves ».

Remarque : l'utilisation d'un tableau numérique facilite l'aspect matériel de l'activité. Les ensembles de pots de colle et d'élèves à comparer sont déjà préparés et la validation s'effectue en déplaçant les objets.

82 — Voir page 60.

Exemple d'une activité ritualisée pour s'exercer à la résolution d'un problème de calcul de l'état final pour un nombre en tant que position

Objectifs

— Résoudre un problème de transformation additive avec recherche de l'état final.
— Appréhender le nombre en tant que position.

Type de situation et procédures

— Déterminer la position finale après un déplacement vers l'arrivée connaissant la position initiale et le déplacement.
— Plusieurs procédures sont possibles : comptage de un en un en s'aidant des doigts, surcomptage à partir des doigts, résultat mémorisé.

Activité ritualisée : déterminer la case d'arrivée du pion sur la piste du jeu de l'oie, connaissant la case de départ et le nombre de cases à avancer.

Matériel : une piste rectiligne comportant un nombre de cases n'allant pas au-delà des quantités dénombrables par les élèves (la piste est assez grande et affichée au tableau), un pion pouvant tenir sur la piste, un gros dé avec deux faces de 1, de 2 et de 3 (le dé peut être muni de points ou d'écritures chiffrées), des jetons se collant sur la piste qui serviront lors de la validation.

Chaque élève dispose de petites cartes comportant l'écriture chiffrée des nombres, les cartes sont reliées par un anneau (comme le montre la photo ci-contre).

Tâche : l'élève doit trouver la carte correspondant à la case sur laquelle le pion arrivera après le déplacement indiqué par le dé.

Validation : l'enseignant ou un élève prend le nombre de jetons correspondant au nombre indiqué par le dé, c'est-à-dire au nombre de cases à avancer. Ces jetons sont collés les uns à la suite des autres, dans chaque case de la piste en commençant par la case juste après le pion. La position du dernier jeton indique la case où le pion arrivera. Cela permet de vérifier les réponses des élèves. On peut décider de n'avancer le pion qu'à la condition que tous les élèves aient trouvé la réponse.

Verbalisation : les positions de départ et d'arrivée du pion sont formulées en utilisant les nombres de position. Exemple : « Le pion était sur la troisième case. Il a avancé de deux cases. Il est maintenant sur la cinquième case. » Le calcul est verbalisé pour faire ressortir la composition. Exemple : « Trois et deux, ça fait cinq. Le pion arrive sur la case numérotée 5. »

Remarque : comme pour l'activité précédente, l'utilisation d'un tableau numérique ou d'un visualiseur facilite l'aspect matériel de l'activité.

Focus | Décomposer et composer les nombres jusqu'à 10 : un exemple de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle[83]

Ce qui est attendu des élèves en fin d'école maternelle

— Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales.
— Parler des nombres à l'aide de leurs décompositions.
— Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.

Situations-repères pour observer les progrès des élèves

La programmation de cycle est élaborée en prenant appui sur les éléments de progressivité proposés dans les ressources d'accompagnement du programme de la page « Acquérir les premiers outils mathématiques – cycle 1 »[84] » publiée en mars 2023 sur Éduscol.

Choix d'un problème de référence

Dans cet exemple, la situation des « maisons des oursons » est le problème de référence commun à l'ensemble des classes de l'école. Les activités présentées visent à faire découvrir et mémoriser les décompositions des nombres jusqu'à 5.

83 — Ressource Éduscol « Décomposer et composer les nombres jusqu'à dix » : https://eduscol.education.fr/document/48383/download.

84 — https://eduscol.education.fr/2819/acquerir-les-premiers-outils-mathematiques-cycle-1#summary-item-1.

Matériel

Chaque élève dispose d'une collection d'oursons et de deux couvercles de boîtes qui symbolisent deux maisons mitoyennes.

Sur une table éloignée, l'enseignant a installé une collection de cartes où sont représentés des lits pour les oursons.

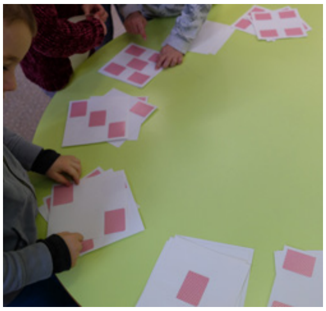
Problème de référence

Chaque élève reçoit des oursons (par exemple cinq) et deux maisons. Il doit aller chercher deux cartes où sont représentés les lits. Il faut chercher une carte pour chaque maison. Les cartes comportent de zéro à cinq lits (il n'y a qu'une seule carte avec cinq lits dans la réserve). Le but du jeu est de chercher juste ce qu'il faut de lits pour que chaque ourson ait un lit.

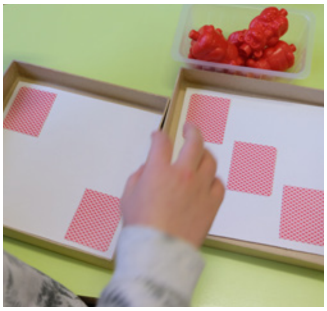
Il faut donc associer deux cartes pour obtenir la quantité de lits souhaitée.

Proposition de consigne aux élèves :

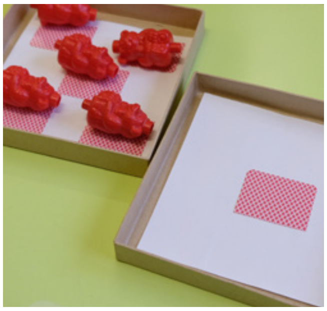
« Deux maisons [montrer les couvercles] vont accueillir cinq oursons pour dormir. Vous allez installer des lits pour chaque ourson en choisissant deux cartes posées sur la table [montrer une carte et demander aux élèves le nombre de lits indiqués]. Ils auront chacun un lit, mais les oursons ne dormiront pas forcément tous dans la même maison. »



Aller chercher deux cartes pour avoir juste ce qu'il faut de lits pour les oursons.



La validation est effectuée en plaçant un ourson sur chaque lit.



Les erreurs donnent l'occasion de découvrir des décompositions : « six, c'est cinq et encore un » et « cinq, c'est un de moins que six ».

La manipulation permet de partager une collection en deux sous-collections. C'est la mise à distance de ce matériel qui va aider les élèves à exprimer cette partition sous la forme d'un nombre et de l'une de ses décompositions (« cinq, c'est deux et encore trois »). Les séances présentées conduisent les élèves à des formulations du type « 3 et 2 » à l'oral puis à l'écrit pour décomposer le nombre 5.

Éléments de progressivité : variables didactiques, procédures possibles et problèmes proposés

À l'école maternelle, dans le respect du rythme de chacun, les élèves mémorisent les décompositions des nombres jusqu'à dix, mais aussi, de manière réciproque, les résultats de calculs additifs dont la somme est inférieure ou égale à dix. Cette approche du calcul à l'école maternelle ne doit pas inciter les enseignants à devancer les apprentissages relevant du CP. **Le signe +, notamment, ne sera introduit qu'à l'école élémentaire, où l'addition trouvera véritablement le statut d'opération.**

Décomposer et composer les nombres jusqu'à dix

Les variables didactiques

	À partir de 3 ans	**À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées**	**À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées**
Catégorie de problème	Réunion de deux collections : – recherche des différentes décompositions possibles ; – recherche de la quantité totale.	Réunion de deux collections : – recherche des différentes décompositions possibles ; – recherche de la quantité totale.	Réunion de deux collections : – recherche des différentes décompositions possibles ; – recherche de la quantité totale ; – recherche d'une partie de la quantité totale.
Quantités en jeu	Quantités jusqu'à 4	Quantités jusqu'à 8	Quantités jusqu'à 10
Matériel et outils mis à disposition pour résoudre le problème	– 2 couvercles symbolisant les 2 maisons – Des figurines d'oursons – Des cartes où sont représentés les lits des oursons	– 2 couvercles symbolisant les maisons – Des figurines d'oursons – Des bouchons symbolisant les oursons – Des cartes où sont représentées des constellations du dé	– 2 puis 3 couvercles symbolisant les maisons – Des bouchons symbolisant les oursons – Des cartes où la quantité de lits est indiquée par une écriture chiffrée – Feuille de papier et crayon
Présentation du problème	– Avec le matériel	– Avec le matériel – Avec des images	– Avec le matériel – Avec des images – À partir de situations évoquées

Les procédures possibles

	À partir de 3 ans	**À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées**	**À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées**
Si les objets sont disponibles	– L'élève décompose la collection d'oursons en deux sous-collections. – Il utilise la reconnaissance perceptive immédiate des deux quantités à chercher. – Il utilise la correspondance terme à terme pour valider sa réponse.	– L'élève décompose la collection d'oursons en deux sous-collections. – Il utilise le comptage un à un ou la reconnaissance perceptive immédiate des deux quantités à chercher. – Il utilise la correspondance terme à terme pour valider sa réponse.	– L'élève utilise des bouchons pour trouver une solution. – Il utilise le comptage un à un ou la reconnaissance perceptive immédiate des deux quantités à chercher. – Il utilise la correspondance terme à terme pour valider sa réponse.
Si les objets ne sont pas disponibles	– L'élève utilise ses doigts pour représenter la quantité d'oursons puis décompose cette collection de doigts en deux sous-collections. – Il utilise les décompositions qu'il a mémorisées (« trois, c'est deux et encore un »).	– L'élève utilise ses doigts pour représenter la quantité d'oursons puis décompose cette collection de doigts en deux sous-collections. – Il surcompte ou décompte avec ses doigts.	– L'élève utilise ses doigts pour représenter la quantité d'oursons puis décompose cette collection de doigts en deux sous-collections. – Il représente la collection d'oursons (ou de bouchons) par le dessin puis décompose la collection en deux sous-collections.

Exemples de jeux et de problèmes proposés

	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées	À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées
Décomposer le tout en deux parties distinctes	– Chercher différentes manières de décomposer une collection de trois (puis quatre) oursons en deux sous-collections. – Jeu de Lucky Luke : trouver rapidement comment montrer une collection comprenant jusqu'à quatre doigts en utilisant ses deux mains.	– Trouver différentes manières de décomposer une collection comprenant jusqu'à huit oursons en deux sous-collections. – Jeu de Lucky Luke : montrer une collection comprenant jusqu'à huit doigts en utilisant ses deux mains.	– Trouver différentes manières de décomposer une collection comprenant jusqu'à dix oursons en deux sous-collections. – Jeu de Lucky Luke : montrer une collection comprenant jusqu'à dix doigts en utilisant ses deux mains. Pour décomposer les nombres de 7 à 10, les élèves peuvent travailler à deux pour montrer les décompositions du type « dix, c'est sept et encore trois ».
Composer le tout à partir de deux parties distinctes	– « Il y a deux oursons dans une maison et un ourson dans l'autre maison. Combien y a-t-il d'oursons en tout ? » – Jeu de Greli-Grelo : l'enseignant montre aux élèves qu'il a un cube dans sa main droite, ferme cette main puis montre qu'il a deux cubes dans sa main gauche. « Greli-Grelo, combien j'ai de cubes dans mon sabot ? »	– « Il y a quatre oursons dans une maison et deux oursons dans l'autre maison. Combien y a-t-il d'oursons en tout ? » – Jeu de Greli-Grelo avec des collections comprenant jusqu'à 8 cubes. – Jeu d'Halli-Galli : trouver rapidement deux cartes qui permettent d'obtenir cinq fruits identiques.	– « Il y a sept oursons dans une maison et trois oursons dans l'autre maison. Combien y a-t-il d'oursons en tout ? » – Jeu de Greli-Grelo avec des collections comprenant jusqu'à dix cubes. – Jeux de plateau avec deux dés (jusqu'à 5 points) : deux dés pointés ; un dé pointé et un dé chiffré ; deux dés chiffrés.

Chercher une des quantités dans une réunion de deux collections	– Jeu du gobelet : « J'ai quatre jetons en tout. On voit deux jetons. Combien de jetons sont cachés sous le gobelet ? »	– « Il y a six oursons en tout. On voit quatre oursons dans cette maison. Combien sont cachés dans l'autre maison ? » – Jeu du gobelet avec des collections de 4 à 6 jetons.	– « Il y a huit oursons en tout. On voit cinq oursons dans cette maison. Combien sont cachés dans l'autre maison ? » – Jeu du gobelet avec des collections de 5 à 10 jetons.

Exemple de séquence articulant les quatre modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle

Dans cet exemple, l'enseignant met en place dans sa classe des situations d'apprentissage variées structurées autour de l'objectif de séquence « découvrir et mémoriser les décompositions des nombres jusqu'à 5 ». Il choisit les situations selon les besoins du groupe classe et ceux de chaque enfant.

Observer et évaluer pour suivre les acquis des élèves

Dès la conception de la séquence, l'enseignant élabore une grille d'observation qui lui permettra de suivre les progrès de chaque élève. Cette évaluation positive, ainsi menée par l'observation puis l'interprétation des progrès au fil de l'eau et au gré de situations aménagées, permet au professeur, en visant les attendus de fin de grande section, d'adapter les activités et tâches proposées en fonction des besoins de chaque enfant pour qu'il continue à progresser au sein du groupe.

La grille d'observation permet d'évaluer si l'élève réussit à :

— composer et décomposer les nombres jusqu'à 5 en s'aidant de jetons ou de ses doigts ;
— composer et décomposer mentalement les nombres jusqu'à 5 ;
— mobiliser la connaissance des décompositions des nombres jusqu'à 5 pour résoudre des problèmes ainsi que dans le cadre de jeux (par exemple, calcul du nombre de points obtenus avec deux dés chiffrés).

Situation de recherche : problème de référence

ÉTAPE 1 – APPRENDRE EN JOUANT

Objectif : permettre aux élèves de s'approprier la situation.

Chaque élève reçoit une collection de trois à cinq oursons. Il cherche différentes manières de répartir la collection dans les deux maisons.

Synthèse : l'enseignant fait verbaliser les décompositions obtenues : « quatre oursons, c'est deux oursons et encore deux oursons » ; « cinq, c'est trois et encore deux ».

ÉTAPE 2 – APPRENDRE EN RÉFLÉCHISSANT ET EN RÉSOLVANT DES PROBLÈMES CONCRETS

Objectif *:* amener les élèves à comprendre qu'à partir de deux collections de quantités connues, ils peuvent trouver la quantité de la réunion de ces deux collections.

Chaque élève reçoit deux cartes où sont représentés les lits des oursons. Il doit aller chercher la quantité exacte d'oursons pour qu'il y ait un ourson sur chaque lit.

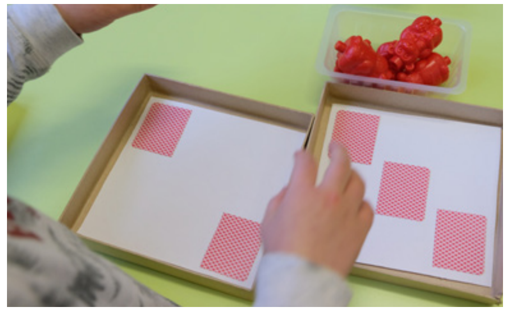
Synthèse : l'enseignant fait verbaliser les compositions obtenues : « deux oursons et encore un ourson, cela fait trois oursons » ; « trois et deux, cela fait cinq ».

ÉTAPE 3 – APPRENDRE EN RÉFLÉCHISSANT ET EN RÉSOLVANT DES PROBLÈMES CONCRETS

Objectif *:* amener les élèves à comprendre qu'une même quantité peut être obtenue de plusieurs manières à partir de deux autres.

Chaque élève reçoit cinq oursons et deux maisons. Il doit aller chercher deux cartes où sont représentés les lits. Il faut chercher une carte pour chaque maison.

Les cartes comportent de zéro à cinq lits (il n'y a qu'une seule carte avec cinq lits dans la réserve pour éviter de n'obtenir que des décompositions du type « 5 et 0 »).

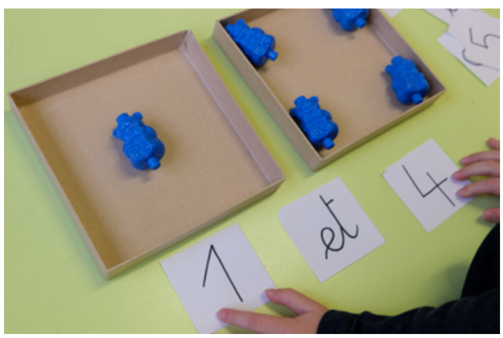


Le but du jeu est de chercher juste ce qu'il faut de lits pour que chaque ourson ait un lit et qu'il n'y ait pas de lit sans ourson. Il faut donc associer deux cartes pour obtenir la quantité de lits souhaitée.

Synthèse : l'enseignant fait verbaliser les décompositions obtenues après parfois plusieurs essais : « Pour avoir cinq lits, j'ai pris trois lits et encore deux lits. »

Institutionnalisation : apprendre en se remémorant et en mémorisant

Objectif : amener les élèves à mémoriser les décompositions additives des nombres jusqu'à 5.



À l'issue de ces temps de recherche, les décompositions obtenues sont institutionnalisées sous forme d'affichage : pour chaque nombre, les élèves collent les décompositions obtenues avec les cartes-lits et indiquent par écrit cette décomposition. L'enseignant structure et formalise les apprentissages opérés.

Situations d'entraînement et d'auto-entraînement

JEU EN AUTONOMIE AVEC LE MATÉRIEL : APPRENDRE EN S'EXERÇANT

Objectif : consolider la connaissance des décompositions des nombres jusqu'à 5.

Les élèves jouent seuls ou à deux avec le matériel « oursons et cartes-lits » disponible dans l'espace mathématiques lors des moments de travail en autonomie ou lors des temps d'accueil en début de journée.

JEU D'AUTO-ENTRAÎNEMENT

Les cartes recto verso

Jeu individuel ou à 2 joueurs, durée entre 5 et 10 min.

Sur le recto de cartes figurent les compositions à effectuer, de l'autre côté, au verso, les résultats. Les cartes sont étalées sur la table, côté recto visible. Un élève propose une carte-question (recto) et l'autre y répond. On retourne la carte : si la réponse est correcte, l'élève qui a répondu gagne la carte.

3 et 2	5
Recto	**Verso**

JEU D'ENTRAÎNEMENT : APPRENDRE EN JOUANT

Jeu du saladier (ou du gobelet)

2 joueurs, durée entre 5 et 10 min.

Les deux joueurs choisissent la quantité totale de jetons utilisée pendant la partie et la nomment ensemble : « Il y a cinq jetons. »

Un des élèves (A) ferme les yeux pendant que l'autre (B) cache une partie des jetons sous un petit saladier (ou un bol) opaque.

L'élève A doit donner la quantité de jetons cachés et justifier sa réponse.

Ensuite, l'élève B lève le saladier et valide la réponse de l'élève A.

La partie se joue avec cinq jetons. Un joueur cache une partie des jetons sous le saladier. Le deuxième joueur doit trouver le nombre de jetons cachés.

Le saladier est soulevé après la réponse du joueur et sa proposition de justification.

Afin de faciliter le déroulé de chacune des parties, un dialogue ritualisé entre les deux joueurs est mis en place :

Élève B : *Ouvre les yeux. Dis-moi combien d'objets sont cachés sous le saladier ?*

Élève A : *Je pense qu'il y a 4 jetons cachés sous le saladier.*

Élève B : *Comment le sais-tu ?*

Ici, il est essentiel que les jetons restent cachés pour anticiper le nombre de jetons cachés (et ne pas le constater uniquement en dénombrant le nombre de jetons cachés).

Élève A : *J'ai compté…/Je sais que…/Je connais…*

Élève B : *Nous allons vérifier ta réponse.*

Dans la partie suivante, les rôles changent.

PROCÉDURES POSSIBLES

- Comptage ou surcomptage sur les doigts.
- Utilisation de la connaissance d'un résultat mémorisé : « 3 et 2 font 5 ». C'est la procédure visée.

Situations de mémorisation

RITUELS MATHÉMATIQUES : APPRENDRE EN SE REMÉMORANT ET EN MÉMORISANT

Jeu de Lucky Luke

Objectif *:* mémoriser les décompositions des nombres jusqu'à 5.

Avec toute la classe ou une demi-classe, durée entre 5 et 10 min.

Il s'agit de « dégainer plus vite que son (n)ombre, oui, mais, sans risque, car, ici, on dégaine ses doigts ! »

Les élèves ont les mains dans le dos, l'enseignant annonce un nombre et, au signal, les élèves doivent montrer la quantité de doigts correspondante avec deux mains. Les décompositions obtenues sont formulées oralement et mises en relation avec la trace écrite élaborée précédemment avec les élèves.

La synthèse permet de consolider la compréhension qu'il y a plusieurs représentations d'un nombre à l'aide de ses décompositions additives.

Variables : dire le mot-nombre oralement ou le « montrer » avec les doigts ou encore avec une collection d'objets réels ou représentés.

JEU D'ENTRAÎNEMENT : APPRENDRE EN JOUANT

Jeu de Halli-Galli

À partir de 2 joueurs, durée entre 5 et 10 min.

Après une phase d'appropriation du matériel (tri et classement de cartes), les élèves jouent à Halli-Galli avec l'enseignant, puis en autonomie pendant le moment l'accueil.

Ce jeu d'appariement de cartes a pour objectif la mémorisation des décompositions du nombre 5.

Variante : jeu avec des cartes où les nombres sont représentés avec des écritures chiffrées. On peut remplacer la sonnette par un objet (par exemple, un ourson à saisir avant les autres joueurs).

Situations de réinvestissement

RITUELS MATHÉMATIQUES : APPRENDRE EN SE REMÉMORANT ET EN MÉMORISANT

Jeu de Greli-Grelo

Objectif : composer le tout à partir de deux parties distinctes (quantités jusqu'à 5).

L'enseignant (puis progressivement un élève en grande section) est chargé de conduire le jeu. Il prend une quantité d'oursons dans une main et les montre à la classe. Vient alors la question : « Combien d'oursons dans cette main ? » Les élèves montrent une quantité de doigts égale à la quantité d'oursons. L'enseignant reproduit cette action avec sa deuxième main et pose la même question. Il regroupe et ferme les deux mains pour former un grelot à agiter et dit : « Greli-Grelo, combien j'ai d'oursons dans mon sabot ? » Les élèves répondent en montrant la quantité totale avec leurs doigts puis, de plus en plus rapidement, en mobilisant la connaissance d'un résultat mémorisé.

L'élève montre trois oursons dans une main, puis la ferme.

L'élève montre deux oursons dans l'autre main, puis la ferme. Il regroupe les deux mains et demande : « Combien d'oursons dans mon sabot ? »

Validation : « J'ai cinq oursons dans mon sabot ! Trois et encore deux, cela fait cinq. »

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : APPRENDRE EN RÉFLÉCHISSANT ET EN RÉSOLVANT DES PROBLÈMES CONCRETS

Objectif : utiliser le nombre pour résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait et de composition.

Exemples de problèmes :

— « Dans la boîte, il y a trois jetons rouges et deux jetons bleus. Combien y a-t-il de jetons en tout dans la boîte ? »
— « J'ai deux jetons. Combien de jetons me manque-t-il pour avoir quatre jetons ? »

Mémorisation de la suite orale des mots-nombres : apprendre des comptines numériques

« Pour que la suite orale des mots-nombres soit disponible en tant que ressource pour dénombrer, il faut qu'elle soit stable, ordonnée, segmentée et suffisamment longue. Elle doit être travaillée pour elle-même et constituer un réservoir de mots ordonnés[85]. » La mémorisation de la suite orale des mots-nombres nécessite un apprentissage spécifique pour atteindre un niveau de maîtrise suffisant :

— la segmentation correcte des mots-nombres ;
— la possibilité de commencer et de s'arrêter n'importe où ;
— la récitation à l'envers.

Les comptines et les livres à compter jouent leur rôle dans cette mémorisation.

Des comptines avec une segmentation par 1

Toutes les comptines ne se valent pas pour conduire cet apprentissage de la chaîne orale. La comptine ci-dessous est structurée avec une segmentation par 3 : [undeuxtrois] nous irons au bois, etc. Cette structure peut faciliter la mémorisation des blocs de trois mots-nombres qui y figurent, mais la suite orale des mots-nombres n'est pas suffisamment segmentée si on veut que l'élève puisse distinguer les mots-nombres les uns des autres et ainsi utiliser la suite orale pour dénombrer.

1, 2, 3	Nous irons au bois
4, 5, 6	cueillir des cerises
7, 8, 9	dans mon panier neuf
10, 11, 12	elles seront toutes rouges

85 — Extrait du BOENJ n° 25 du 24 juin 2021 : https://cache.media.education.gouv.fr/file/25/86/5/ensel550_annexe_1413865.pdf.

Les comptines numériques, quand elles sont construites avec segmentation de la suite orale par 1 en faisant intervenir d'autres mots (exemple emprunté à Prévert : « Une pierre, deux maisons, trois ruines… ») et non une série indifférenciée (« undeux-troisquatrecinq… »), permettent de mieux distinguer les mots-nombres. Cela aura une incidence sur l'apprentissage des procédures de comptage-dénombrement.

Exemple

Lors de la mise en scène de la comptine ci-contre, *Les Cubes*, l'enseignant veille à dénombrer les cubes en utilisant le comptage-dénombrement. Il est vigilant à ne pas dire « deux » au moment où il pose le doigt sur le cube, c'est-à-dire avant que celui-ci soit déplacé, sinon l'enfant comprendra qu'il va déplacer un cube qui s'appelle « le deux », le mot « deux » fonctionnant alors comme une sorte de numéro : c'est ce comptage-numérotage qu'il faut éviter. En revanche, il veille à ne dire « deux » qu'après que le cube a été déplacé, c'est-à-dire après que la collection de deux cubes a été formée, ce qui favorise la compréhension du fait que le mot « deux » désigne une pluralité. Pour le cube suivant, le mot « trois » est prononcé seulement après que la nouvelle collection a été formée, etc. L'enseignement du comptage-dénombrement est encore plus explicite, c'est-à-dire « mieux porté par le langage », quand l'enseignant s'exprime ainsi (on laisse le lecteur imaginer ce que fait le doigt au moment où chacun des noms de nombre est prononcé) : « un », « et-encore-un, deux », « et-encore-un, trois ». Enfin, la forme la plus explicite qui soit est celle où, de plus, comme dans la comptine des cubes, le nom de l'unité est prononcé : « Un cube ; et-encore-un, deux cubes ; et-encore-un, trois cubes »… En effet, dans l'expression « trois cubes », par exemple, la syntaxe de ce petit groupe nominal fait que le mot « trois » réfère à une pluralité, il n'est pas un numéro.

Les cubes
1 cube
2 cubes
3 cubes
4 cubes
5 cubes
6 cubes
7 cubes
8 cubes
9 cubes,
ça titube !
10 cubes…
Tous les cubes
sont en tas…
PATATRAS !
ET VOILÀ !

Des comptines pour aider à comprendre le principe de l'itération de l'unité

Grâce à la pratique régulière de jeux et de comptines qui exercent le passage d'un nombre à un autre, l'enseignant encourage les élèves à comprendre que les nombres consécutifs sont liés par l'itération de l'unité (trois, c'est deux et encore un). Au départ, l'accent est mis sur les tout petits nombres de un à quatre. Après quatre ans, les comptines déclenchent des activités de décomposition et recomposition sur des quantités jusqu'à dix.

Exemples

Les lapins copains

Un petit lapin sur le chemin
Rencontre un autre petit lapin.
Deux petits lapins sont devenus copains.
Deux petits lapins sur le chemin
Rencontrent un autre petit lapin.
Trois petits lapins sont devenus copains.
Trois petits lapins sur le chemin
Rencontrent un autre petit lapin.
Quatre petits lapins sont devenus copains.
Quatre petits lapins sur le chemin
Rencontrent un autre petit lapin.
J'ai cinq doigts sur ma main
pour compter les petits lapins.
Un, deux, trois, quatre, cinq !

Cinq pommes dans mon panier

Cinq pommes dans mon panier
J'en croque une,
Il n'en reste que quatre
Quatre pommes...
Trois pommes...
Deux pommes...
Une pomme dans mon panier
Je la croque, je la croque,
Il n'en reste plus,
Je les ai toutes croquées !

Des comptines portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités

Entre deux et quatre ans, des comptines portant sur la décomposition et la recomposition des petites quantités sont fréquemment proposées pour stabiliser la connaissance des petits nombres jusqu'à cinq.

Voici ma main

Voici ma main
Elle a cinq doigts
En voici deux
En voilà trois
Voici ma main
Elle a cinq doigts
En voici quatre
Et un tout droit.

Quatre chats gris

Trois gros chats gris et un petit.
Les quatre chats sont dans mon lit.
Pouah, je n'en veux pas,
partez d'ici coquins de chats gris !

Des comptines pour apprendre la suite orale des mots-nombres ordinaux

Pour communiquer la position d'un objet dans une file organisée, un élève doit connaître la suite orale des mots-nombres ordinaux (premier/première, deuxième, troisième, etc.). Pour cela, il doit définir un point de départ (origine) et un sens de parcours, c'est-à-dire donner un ordre.

Il existe encore peu de comptines permettant de travailler cet objectif. La plus connue est celle présentée ci-dessous. Elle permet de repérer un ordre selon un ordre spatial et peut être jouée avec les élèves pour leur faire comprendre que le sens du rang est fondamental pour déterminer quelle poule est la première.

Les poules

Quand trois poules
Vont aux champs,
La première va devant.

La deuxième suit la première.

La troisième va derrière.

Quand trois poules
Vont aux champs,
La première va devant.

Si, par exemple, ce jeune élève veut communiquer la position de la voiture rouge dans la file de voitures qu'il a réalisée, il doit pouvoir dire que la voiture rouge est en troisième position.

Focus | Résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait : un exemple de mise en œuvre en classe[86]

Ce qui est attendu des élèves en fin d'école maternelle

- Commencer à résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait.
- Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.

Situations-repères pour observer les progrès des élèves

La programmation de cycle est élaborée en prenant appui sur les éléments de progressivité proposés dans les ressources d'accompagnement du programme de la page « Acquérir les premiers outils mathématiques – cycle 1 »[87] publiée en mars 2023 sur le site Éduscol.

Choix d'un problème de référence

Dans cet exemple, le « problème des chevaux » est le problème de référence commun à l'ensemble des classes de l'école. L'enseignant dispose d'un jouet constitué d'une ferme à l'intérieur de laquelle on peut installer des figurines de chevaux. Les élèves ne peuvent pas voir son contenu quand elle est fermée. Le professeur place, par exemple, cinq figurines de chevaux dans la ferme puis en ajoute deux autres (ou en retire deux) en montrant chaque fois les quantités de chevaux qui y sont placés et en verbalisant : « J'ai cinq chevaux dans ma ferme, j'en rajoute encore deux (ou j'en retire deux). Combien y a-t-il de chevaux dans ma ferme maintenant ? »

86 — Ressource Éduscol « Décomposer et composer les nombres jusqu'à dix » : https://eduscol.education.fr/document/48383/download.

87 — https://eduscol.education.fr/2819/acquerir-les-premiers-outils-mathematiques-cycle-1#summary-item-1.

Éléments de progressivité : variables didactiques, procédures possibles et problèmes proposés

Utiliser le nombre pour résoudre des problèmes d’ajout ou de retrait

Les variables didactiques

	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées	À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées
Catégorie de problème	Recherche de l’état final	Recherche de l’état final	– Recherche de l’état final – Recherche de la transformation
Quantités en jeu	Quantités jusqu’à 4	Quantités jusqu’à 8	Quantités jusqu’à 10
Matériel et outils mis à disposition pour résoudre le problème	– Ferme, puis boîte symbolisant la ferme – Figurines de chevaux	– Ferme ou boîte, puis image de ferme – Figurines puis images de chevaux – Cubes ou bouchons symbolisant les chevaux – File numérique	– Boîte, puis image de ferme – Figurines, puis images de chevaux – Cubes ou bouchons symbolisant les chevaux – File numérique – Feuille de papier et crayon
Présentation du problème	Avec le matériel	– Avec le matériel – Avec des images	– Avec le matériel – Avec des images – À partir de situations évoquées

Les procédures possibles

	À partir de 3 ans	**À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées**	**À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées**
Si les objets sont disponibles	L'élève détermine le résultat par perception immédiate de la quantité.	L'élève : – détermine le résultat en comptant un à un ; – ou utilise la reconnaissance perceptive immédiate.	L'élève : – détermine le résultat en utilisant le comptage un à un ; – ou utilise la reconnaissance perceptive immédiate.
Si les objets ne sont pas disponibles	L'élève : – recompte sur ses doigts ; – ou utilise sa connaissance des décompo-sitions (« trois, c'est deux et encore un »).	L'élève : – recompte sur ses doigts ; – ou surcompte ou décompte avec ses doigts ou sur la file numérique ; – ou utilise sa connaissance des décompositions (« cinq, c'est trois et encore deux »).	L'élève : – recompte sur ses doigts, dénombre les objets qu'il a représentés sur un dessin ou un schéma ; – surcompte ou décompte avec ses doigts ou sur la file numérique ; – utilise sa connaissance des décompositions (« neuf, c'est cinq et encore quatre »).

Exemples de jeux et de problèmes proposés

	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées	À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées
Problèmes de référence	**Recherche de l'état final** – « J'ai deux chevaux dans ma ferme, j'en ajoute encore un. Maintenant, combien y a-t-il de chevaux dans ma ferme ? » – « J'ai mis trois chevaux dans ma ferme. J'en retire un. Maintenant, combien y a-t-il de chevaux dans la ferme ? »	**Recherche de l'état final** – Réactivation : problèmes proposés en petite section. – « J'ai trois chevaux dans ma ferme, j'en ajoute encore deux. Combien cela me fait-il de chevaux ? » – « J'ai cinq chevaux dans la ferme. J'en retire deux. Combien reste-t-il de chevaux dans la ferme ? »	**Recherche de l'état final** – Réactivation : problèmes proposés en moyenne section. – « J'ai cinq chevaux dans ma ferme, j'en ajoute encore quatre. Combien cela me fait-il de chevaux ? » – « J'ai dix chevaux dans la ferme. J'en retire deux. Combien reste-t-il de chevaux dans la ferme ? » **Recherche de la transformation** – « Je veux mettre dix chevaux dans ma ferme. Pour l'instant, il y en a six. Combien dois-je rajouter de chevaux ? »

Le jeu de la boîte	**Recherche de l'état final**	**Recherche de l'état final**	**Recherche de l'état final**
	– « J'ai trois bouchons dans ma boîte. J'ajoute un bouchon. Maintenant, combien y a-t-il de bouchons dans ma boîte ? » – « J'ai quatre bouchons dans ma boîte. Je retire un bouchon. Maintenant, combien y a-t-il de bouchons dans ma boîte ? »	– « J'ai quatre bouchons dans ma boîte. J'ajoute deux bouchons. Combien y a-t-il de bouchons dans ma boîte maintenant ? » – « J'ai six bouchons dans ma boîte. J'en retire deux. Combien reste-t-il de bouchons dans ma boîte ? »	– « J'ai cinq bouchons dans ma boîte. J'en ajoute trois. Combien y a-t-il de bouchons dans ma boîte maintenant ? » – « J'ai neuf bouchons dans ma boîte. J'en retire cinq. Combien reste-t-il de bouchons dans ma boîte ? » **Recherche de la transformation** – « Je veux avoir huit bouchons dans ma boîte. Pour l'instant, il y en a dix. Combien dois-je retirer de bouchons ? » **Problèmes à deux étapes** – « J'ai dix bouchons dans ma boîte. Je retire trois bouchons puis j'en retire encore deux. Combien y a-t-il de bouchons dans ma boîte maintenant ? »

Autres contextes	**Recherche de l'état final** – « Lilou a deux pommes dans son panier. Sa maman lui donne deux pommes. Maintenant, combien de pommes a-t-elle dans son panier ? » – « Tom a quatre pommes dans son panier. Il donne deux pommes à sa sœur. Maintenant, combien de pommes reste-t-il dans son panier ? »	**Recherche de l'état final** – « Il y a six oiseaux sur la branche. Quatre oiseaux s'envolent. Combien y a-t-il d'oiseaux sur la branche maintenant ? » – « Il y a trois oiseaux sur la branche. Trois oiseaux viennent se poser sur la branche. Combien y a-t-il d'oiseaux sur la branche maintenant ? »	**Recherche de l'état final** – « Zoé joue au jeu de l'oie. Son pion est sur la case 7. Elle lance le dé et fait 2. Sur quelle case son pion va-t-il arriver ? » – « Sami joue au jeu de l'oie. Son pion est sur la case 7. Il doit reculer de 2 cases. Sur quelle case son pion va-t-il arriver ? » **Recherche de la transformation** – « Il y a 6 oiseaux sur la branche. Plusieurs oiseaux s'envolent. Maintenant, il y a 4 oiseaux sur la branche. Combien d'oiseaux se sont envolés ? »

Évaluer pour suivre les progrès des élèves

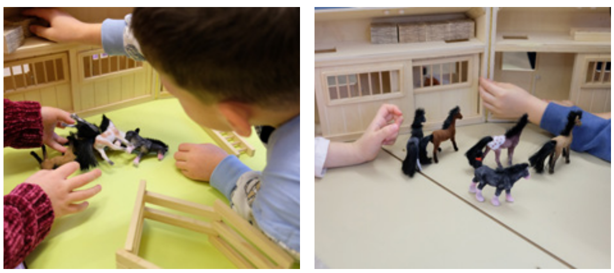
Dès la conception de la séquence, l'enseignant élabore une grille d'observation qui lui permet de suivre les progrès de chaque élève. Cette évaluation positive, ainsi menée par l'observation puis l'interprétation des progrès au fil de l'eau et au gré de situations aménagées, permet au professeur, en visant les attendus de fin de grande section, d'adapter les activités et tâches proposées en fonction des besoins de chaque enfant pour qu'il continue à progresser au sein du groupe.

La grille d'observation permet d'évaluer si l'élève réussit à utiliser :

— des procédures de dénombrement : perception immédiate des quantités ou comptage des chevaux, des bouchons ou des chevaux représentés sur un dessin, comptage sur les doigts ;
— des procédures de surcomptage (ou de décomptage) : sur les doigts, sur un dessin, en s'appuyant sur des écritures chiffrées ou sur la file numérique, mentalement ;
— des stratégies proches du calcul, plus ou moins explicitées et formalisées : appui sur les faits numériques mémorisés, appui sur le principe d'itération de l'unité, procédure proche du calcul mental (exemple : « quatre et encore un, cela fait cinq, et encore un, cela fait six »).

Un exemple de progression utilisée en classe

Cette progression concerne les problèmes de transformation de collections où une transformation additive ou soustractive s'opère. La quantité initiale de la collection et la transformation sont connues. Les élèves doivent chercher la quantité finale après la transformation. Les quantités impliquées dans les problèmes sont adaptées aux connaissances des élèves.

Étapes de la progression	Objectifs langagiers
Étape 1 : appropriation de la situation par le jeu **Objectif** : amener chaque élève à se familiariser avec la situation de transformation dans le cadre de jeux symboliques. **Jeux dans l'espace mathématiques** Au cours des semaines qui précèdent la séquence d'apprentissage, les élèves découvrent l'univers de référence du « problème des chevaux » en jouant avec le matériel (ferme et chevaux) et lors de la lecture de livres documentaires.  Jeu avec le matériel dans l'espace mathématiques de la classe.	**Enrichir le vocabulaire, acquérir et développer la syntaxe** Pendant les temps de jeux et la lecture de livres documentaires, l'élève évoque ses actions, développe sa syntaxe (exemple : un cheval/des chevaux) et s'approprie le vocabulaire lié au contexte du problème (selon l'âge des élèves : ferme, cheval/chevaux, ajouter, retirer, dans, à l'intérieur, avant, maintenant, écurie, centre équestre, équitation, etc.).
Découverte du problème L'enseignant raconte et joue des problèmes en manipulant le matériel. La ferme reste ouverte au cours de la manipulation afin de permettre aux élèves de visualiser le résultat. Exemple : « J'ai huit chevaux dans ma ferme, j'en retire trois. Combien y a-t-il de chevaux dans ma ferme maintenant ? » L'élève détermine la quantité finale par comptage de un en un ou à partir des décompositions qu'il connaît. Les procédures utilisées dépendent des quantités en jeu et des connaissances des élèves.	**Échanger et réfléchir avec les autres** L'élève explique la procédure qui a permis de trouver le résultat.
Étape 2 : résolution du problème avec le matériel **Objectif** : amener chaque élève à comprendre un énoncé de problème en étant capable de réaliser l'action décrite par l'énoncé.	**Comprendre et apprendre** L'élève raconte l'histoire du problème présentée par l'enseignant de façon non verbale.

Présentation non verbale de la situation
Chaque élève utilise des briques d'un jeu de construction pour matérialiser un espace symbolisant la ferme. Il dispose d'une collection de chevaux (ou d'images de chevaux).

Reproduction avec le matériel des actions effectuées par l'enseignant.

L'enseignant demande aux élèves d'observer ce qu'il fait. Il montre aux élèves une collection de cinq chevaux, puis les place à l'intérieur de la ferme. Il prend trois autres chevaux, les montre aux élèves, les place dans la ferme. Il demande aux élèves de refaire cette histoire avec leurs chevaux. Les élèves racontent ensuite ce qui s'est passé. S'ils n'évoquent pas la quantité finale de chevaux présents dans la ferme, l'enseignant leur pose la question « Maintenant, combien y a-t-il de chevaux dans ma ferme ? ». La validation est effectuée avec le matériel par le comptage un à un.

Présentation verbale de la situation
L'enseignant énonce le problème et l'élève réalise l'action avec le matériel sans que les chevaux contenus dans la ferme de l'enseignant soient visibles.

Réalisation de l'action décrite par l'énoncé avec le matériel.

Exemple : « J'ai trois chevaux dans ma ferme, j'ajoute encore sept chevaux. Combien y a-t-il de chevaux dans ma ferme maintenant ? ».
Les élèves utilisent le matériel pour résoudre le problème. La validation est effectuée avec le matériel de l'enseignant.

Enrichir le vocabulaire, acquérir et développer la syntaxe
Connecteurs de temps (au début, d'abord, ensuite, après, maintenant, etc.), phrases interrogatives (« Combien reste-t-il de chevaux ? »), champ lexical lié au problème (ferme, cheval/chevaux, ajouter, retirer, enlever, groupes nominaux comprenant un adjectif numéral, etc.).

Échanger et réfléchir avec les autres
L'élève explicite la procédure avec les décompositions et recompositions utilisées. Exemple : « Je sais que quatre chevaux et encore deux chevaux, cela fait six chevaux. »

Écouter de l'écrit et comprendre
L'élève écoute l'énoncé du problème et représente la situation avec le matériel. Il reformule l'histoire du problème et ce que l'on cherche. Il propose une réponse syntaxiquement correcte.

Étape 3 : résolution du problème en manipulant des bouchons

Objectif : amener chaque élève à comprendre que l'on peut remplacer les objets du contexte du problème par d'autres objets un peu plus symboliques comme des bouchons (ou des cubes).

L'enseignant manipule la ferme et les chevaux, l'élève n'y a pas accès. En revanche, l'élève dispose de bouchons (ou de cubes) pour l'aider à anticiper la quantité finale de chevaux.
L'élève détermine la quantité finale soit par comptage de un en un, soit à partir de décompositions ou de recompositions qu'il connaît, soit par surcomptage.

Réalisation de l'action décrite par l'énoncé avec des bouchons.

La validation s'effectue en réalisant une correspondance terme à terme entre les bouchons et les chevaux.

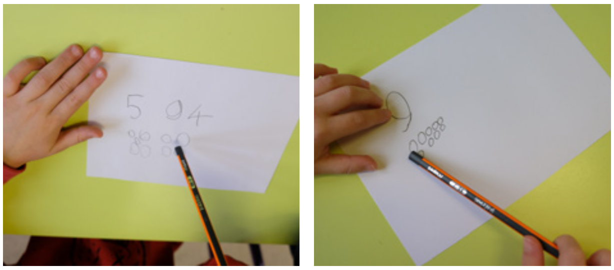
Échanger et réfléchir avec les autres

L'élève explique comment utiliser les bouchons (ou les cubes) pour résoudre le problème.

Étape 4 : blocage de la manipulation

Objectif : amener chaque élève à comprendre qu'à défaut d'objets, on peut utiliser ses doigts ou un dessin ou le calcul.

L'enseignant manipule la ferme et les chevaux, l'élève n'y a pas accès. Par contre, l'élève dispose de différents outils (feuilles pour dessiner, frise numérique, etc.) pour l'aider à anticiper la quantité finale de chevaux.



Représentation de la situation par le dessin et dénombrement.

Ne disposant plus de matériel physique, les élèves peuvent alors mobiliser les procédures de dénombrement utilisant le dessin (représentation des chevaux ou des bouchons sur une feuille), le comptage un à un ou le surcomptage sur les doigts, le surcomptage sur la frise numérique.

Représentation des quantités en jeu à l'aide des doigts, puis comptage de un en un de tous les doigts.

Surcomptage sur les doigts : « Je mets deux dans ma tête et, avec les doigts, je fais trois, quatre, cinq. Il y a cinq chevaux. »

Enfin, le problème est proposé sans possibilité d'utiliser le passage à l'écrit ou à la frise numérique. Le surcomptage avec les doigts ou les procédures de calcul utilisant les faits numériques connus sont alors les outils les plus rapides et efficaces pour anticiper la situation finale et résoudre le problème. Ces procédures sont institutionnalisées puis entraînées régulièrement. La validation est effectuée à l'aide du matériel.

Échanger et réfléchir avec les autres

- L'élève explique sa procédure. Il répond aux questions de l'enseignant : « Comment le sais-tu ? » ; « Comment es-tu sûr de ta solution ? » ; « Comment peux-tu vérifier ? » ; « Comment as-tu fait ? »
- L'élève explicite les procédures de surcomptage : « J'ai mis cinq dans ma tête et avec les bouchons j'ai fait six, sept. »
- L'élève explicite les procédures de calcul : « Je sais qu'il y a cinq chevaux parce que trois chevaux et encore un cheval, cela fait quatre chevaux, et encore un cheval, cela fait cinq chevaux. » ; « Je sais que trois et encore deux, cela fait cinq. »

Comprendre et apprendre

L'élève reformule l'histoire du problème en s'aidant du matériel : « Au début, il y avait cinq chevaux dans la ferme, puis tu as ajouté deux chevaux. Maintenant, il y a sept chevaux en tout. » Puis il parle des nombres à l'aide de leur décomposition : « Cinq et deux, cela fait sept. »

Lors de la synthèse, l'élève reformule la ou les procédures qu'il faut mémoriser.

Organisation des temps d'entraînement

Les situations d'apprentissage liées à la résolution de problèmes seront répétées autant que nécessaire ; elles contribuent à constituer une première mémoire de problèmes et à installer une première culture de la résolution de problèmes. **L'objectif est de permettre à un élève découvrant un nouveau problème de pouvoir réaliser des analogies d'un problème qu'il a déjà résolu** (ici, le « problème des chevaux ») **et de mobiliser les procédures permettant de le résoudre.** Ainsi, lors des séances d'entraînement, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait avec recherche de l'état final, d'abord dans le contexte du problème de référence, puis dans des contextes variés (jeu de la boîte, problème des oiseaux sur une branche, etc.).

Exemples d'activités et de problèmes proposés

JEUX À DEUX DANS L'ESPACE MATHÉMATIQUES

Objectif : amener les élèves à multiplier les expériences de résolution de problèmes et à mémoriser des résultats additifs.

Jeu en autonomie

Les élèves jouent à deux avec le matériel. Un élève invente un problème. Son camarade cherche le résultat. La validation est effectuée à l'aide du matériel.

Dictée à l'adulte

Une séance de dictée à l'adulte est organisée pour rédiger un énoncé de problème inventé par les élèves. Cet énoncé est communiqué à une autre classe dans le cadre d'un échange régulier autour des mathématiques (dans le cadre de la liaison grande section-CP par exemple).

LE JEU DE LA BOÎTE

Objectif : amener les élèves à réinvestir, dans un nouveau contexte, les procédures utilisées pour résoudre le problème des chevaux.

Séances d'entraînement et rituels

Le jeu de la boîte est proposé dans le cadre des séances d'entraînement, puis en tant qu'activité ritualisée.

Exemple : « J'ai six jetons dans ma boîte. Je retire un jeton. Maintenant, combien y a-t-il de jetons dans ma boîte ? »

Jeu à deux

Quand les élèves se sont bien approprié le jeu, ils y jouent à deux, en autonomie.

LE PROBLÈME « LES OISEAUX SUR LA BRANCHE »

Objectif : amener les élèves à découvrir ou renforcer les procédures de surcomptage et notamment celles prenant appui sur la file numérique.

Exemple de problème : « Il y a quatre oiseaux sur la branche. Trois oiseaux viennent se poser sur la branche. Combien y a-t-il d'oiseaux sur la branche maintenant ? »

Le but n'est pas d'enseigner aux élèves de l'école maternelle (ni à ceux de l'école élémentaire) une classification formelle de problèmes basiques telle qu'elle peut être présentée dans des recherches en didactique des mathématiques, mais d'amener les élèves à reconnaître progressivement différents problèmes pouvant relever des structures additives et multiplicatives et d'automatiser les procédures à mettre en œuvre.

Importance des moments de synthèse, d'institutionnalisation et de réactivation

Lors des moments de synthèse et d'institutionnalisation, l'enseignant s'attache à faire expliciter les procédures des élèves. Quand il le juge possible, l'enseignant hiérarchise ces procédures en prenant en compte leur efficacité et leur économie afin de montrer qu'elles ne se valent pas toutes. Au cours de son parcours, l'élève est ainsi amené à passer progressivement de procédures de dénombrement (manipulation effective des objets, comptage un à un sur les doigts ou sur un dessin) à l'utilisation des procédures se rapprochant du calcul.

L'enseignant organise des retours réguliers sur les découvertes et acquisitions antérieures pour s'assurer de leur stabilisation. Il prend appui sur les outils collectifs les plus adaptés à l'âge des élèves. Cette activité est l'occasion d'un rappel de connaissances antérieures sur lesquelles s'appuyer, de mises en relation avec des situations différentes déjà rencontrées ou de problèmes similaires posés au groupe.

LES BOÎTES À PROBLÈMES : UN MOYEN DE REMOBILISER LES ACQUIS

Certaines écoles ont choisi de concevoir des boîtes à problèmes pour garder la mémoire des problèmes de référence rencontrés dans les classes. Ces boîtes contiennent tout le matériel nécessaire pour pouvoir rejouer un problème (par exemple, chevaux, ferme, bouchons). Une photographie collée sur le couvercle de la boîte permet aux élèves d'identifier le problème de référence qu'ils pourront à nouveau investir.

L'AFFICHAGE

L'affiche constitue un écrit de référence du vécu commun de la classe : il doit être lisible, clair, succinct et, surtout, construit avec les élèves. L'affiche met en lumière la ou les procédures les plus efficaces découvertes au cours des séances d'apprentissage. Les affiches collectives correspondent aux problèmes de référence rencontrés.

Pour l'élève, l'affiche fournit un point d'appui, un aide-mémoire des procédures. Elle lui permet de se repérer dans la hiérarchie de procédures et de franchir les étapes du cheminement dans lequel il s'est inscrit.

Pour l'enseignant, elle constitue un support pour formaliser, guider le raisonnement des élèves et favoriser les analogies avec les problèmes antérieurs. Elle constitue une référence essentielle dans les phases d'entraînement (« c'est comme le problème de… »).

Exemple d'affichage réalisé en grande section : un élève peut y repérer la procédure qu'il a utilisée et se placer dans une dynamique de progrès en essayant d'utiliser les procédures les plus efficaces.

L'affichage de classe évolue au cours de l'année au fur et à mesure que des procédures plus efficaces sont découvertes pour un même type de problème.

En résumé

- Une programmation efficace pour l’apprentissage du nombre doit prendre en compte ses trois principales utilisations : le nombre pour exprimer les quantités (fonction cardinale), le nombre pour désigner un rang, une position (fonction ordinale), et enfin le nombre pour résoudre un problème.
- L’enseignement du nombre en tant que quantité s’appuie sur la perception visuelle, la correspondance terme à terme, le comptage de un en un et la désignation orale des quantités ainsi que sur la comparaison de quantités, les décompositions et recompositions à partir d’objets manipulables, de représentations analogiques et diverses représentations symboliques, dont l’écriture chiffrée des nombres.
- L’apprentissage de la fonction ordinale nécessite la connaissance des mots désignant des positions qui ne sont pas les mêmes que ceux utilisés pour désigner les quantités. La comparaison de positions nécessite de savoir désigner les positions en utilisant la suite numérique orale des nombres cardinaux. Il est donc nécessaire d’avoir déjà compris le nombre en tant que quantité avant d’aborder le nombre en tant que position.
- L’enseignement de la résolution de problèmes s’appuie sur des problèmes numériques portant sur des nombres en tant que quantité (composition de deux collections, ajout ou retrait à une collection, produit ou partage) ou sur des nombres en tant que position (déplacements en avant ou en arrière).
- L’enseignement du nombre mobilise et articule les quatre modalités spécifiques d’apprentissage de l’école maternelle : apprendre en jouant ; apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes concrets ; apprendre en s’exerçant ; apprendre en se remémorant et en mémorisant.
- Privilégier les jeux symboliques et de société avec les élèves permet de proposer des situations évolutives afin de consolider les apprentissages mathématiques à travers l’imitation, la manipulation et l’observation.

IV

De l’école maternelle à l’école élémentaire : le nombre dans le cadre de la continuité grande section-CP

« [L'école maternelle] travaille en concertation avec l'école élémentaire, plus particulièrement avec le cycle 2, pour mettre en œuvre une véritable continuité des apprentissages, un suivi individuel des enfants.[88] » Favoriser la continuité du parcours d'apprentissage de l'élève entre la grande section et le CP vise à sécuriser l'entrée au CP de chaque élève. Cette dernière partie identifie des composantes d'une continuité réussie autour de la construction du nombre.

L'accompagnement vers le CP est assuré par les enseignants de grande section et de CP et se construit autour d'un double enjeu :

— celui de la liaison entre les écoles, les enseignants, les élèves et les familles. Cette liaison se construit à travers des visites, des échanges d'actions et de travaux pédagogiques communs, des rencontres avec les parents afin de sécuriser la relation avec les familles. Ces actions visent à rassurer l'enfant et sa famille dans ses premiers pas à l'école élémentaire ;
— celui de la continuité pédagogique qui vise à coordonner les contenus et les méthodes d'apprentissage pour éviter les ruptures dans le parcours d'apprentissage de l'élève.

La continuité des apprentissages est renforcée par une harmonisation pédagogique qui se construit autour de deux axes de réflexion :

— un axe collectif : outils, matériels, procédures, progressions, programmations ;
— un axe individuel : acquis de l'élève, réussites et points d'attention.

Amorcer les apprentissages du CP en s'appuyant sur ceux construits en grande section rassure les élèves et sécurise l'entrée au CP. Il importe donc de mobiliser des situations vécues en maternelle (situations de référence, jeux, affichages, etc.). Elles sont d'autant plus efficaces qu'elles ont été régulièrement exploitées en grande section et font sens pour chacun.

Les évaluations nationales de début de CP constituent un levier d'analyses et d'actions pour les professeurs de grande section et de cours préparatoire afin d'ajuster leurs enseignements et de répondre aux besoins de chaque élève.

88 — Programme d'enseignement du cycle 1, BOENJ n° 25 du 24 juin 2021, https://cache.media.education.gouv.fr/file/25/86/5/ensel550_annexe_1413865.pdf.

La construction du nombre

À l'école maternelle, les élèves ont appris que l'unité permet de passer d'un nombre à son suivant ou au nombre précédent : « trois, c'est deux et encore un… ». Ils ont commencé à construire la fonction cardinale et ordinale du nombre. Ils ont utilisé des nombres pour résoudre des problèmes. Ce travail contribue à la construction progressive du système décimal, avec en premier lieu la construction de la dizaine, qui est un des principaux objectifs du CP avec le passage du dénombrement au calcul.

Les propositions suivantes sont formulées à partir des attendus de fin de CP. Ainsi, le professeur s'inscrit dans la continuité des situations proposées à l'école maternelle. Il accompagne l'élève de grande section pour aller des compétences qu'il a acquises en fin de cycle 1 aux compétences attendues en fin de CP.

Les faits numériques : comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer

Les faits numériques sont les résultats de calculs mémorisés disponibles immédiatement. Les recherches sont unanimes sur l'importance de cette mémorisation pour l'apprentissage du calcul. Les faits numériques jouent un rôle essentiel dans la mesure où ils soulagent la mémoire de travail des élèves. Une fragilité dans la connaissance de ces faits numériques a des répercussions négatives sur les performances ultérieures en mathématiques. Il est donc indispensable de les enseigner, d'accompagner les élèves dans leur mémorisation à travers différents dispositifs (jeux, rituels, etc.).

Le travail de décomposition, de recomposition des nombres, des compléments à dix mené en maternelle constitue une base essentielle dans la mémorisation des faits numériques qui deviendront des automatismes chez les élèves.

Les jeux présentés tels que Lucky Luke, Greli-Grelo (cf. focus « Décomposer et composer les nombres jusqu'à 10 : un exemple de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle ») favorisent la mémorisation des faits numériques. La contrainte de rapidité y contribue. Ce type de jeux a vocation à être poursuivi en CP sous différentes formes. Dans le jeu de Lucky Luke, on peut, par exemple, demander d'écrire la décomposition sur une ardoise à l'aide de notations symboliques, de choisir une décomposition en associant deux cartes faisant figurer des nombres sous différentes représentations, ajouter des contraintes (pas de nombre 1 dans la décomposition proposée pour des nombres supérieurs à 3, proposer deux décompositions pour un même nombre, etc.).

Le jeu Lucky Luke en début de CP permet d'assurer une continuité avec des pratiques usitées en grande section ainsi que de conforter des acquis et des automatismes concernant les décompositions d'un nombre. Pour aller au-delà de dix, ce jeu laisse progressivement la place à d'autres tels que Greli-Grelo ou le jeu du saladier présentés dans le focus « Décomposer et composer les nombres jusqu'à 10 : un exemple de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle ».

Le jeu des allumettes pour construire l'aspect décimal de la numération

Le professeur prend une grosse boîte d'allumettes qu'il renverse. Les élèves s'organisent pour déterminer combien il y a d'allumettes. Les élèves font des propositions de comptage de un en un, de groupements par deux, par cinq et par dix.

En grande section, la réponse attendue est « il y a dix paquets de dix allumettes ».

Attendus de fin de CP

- Dénombrer des collections en les organisant.
- Dénombrer des collections en utilisant des groupements par dix.
- À partir d'un cardinal donné, constituer des collections en utilisant des groupements par dix.

Au CP, l'élève peut nommer la quantité 100. Il doit pouvoir répondre à une commande à partir d'un cardinal donné. Il constitue des collections en effectuant des groupements par dix pour répondre à des commandes telle que « donne-moi 45 allumettes ». Cette activité de commande fait l'objet d'un travail tout au long du cycle 2 pour comprendre l'aspect décimal de la numération.

Au CP, l'élève doit comprendre, par exemple, que « quarante-cinq » équivaut à « quatre dizaines et cinq unités », à « 10 + 10 + 10 + 10 + 5 », à « 40 + 5 ».

Résoudre des problèmes : utiliser des nombres entiers et le calcul

À l'école maternelle, les élèves ont déjà été confrontés à des problèmes additifs, soustractifs, multiplicatifs et de partage. Ils ont compris qu'il est possible de prévoir la quantité d'objets obtenus puis de l'exprimer par un seul nombre. Les situations d'apprentissage proposées sont alors vécues par les élèves : ils manipulent pour trouver une solution, ils verbalisent leurs procédures et valident leurs solutions à l'aide du matériel (cf. focus « Décomposer et composer les nombres jusqu'à 10 : un exemple de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle »). L'enjeu du CP est de faire passer les élèves de procédures de dénombrement sur des collections à des procédures de calcul.

« Une étape déterminante, emblématique de l'enseignement des mathématiques au CP par rapport à la maternelle, se situe dans le passage d'une procédure de dénombrement (comptage, surcomptage ou décomptage) à la traduction de celle-ci en termes d'écritures additives (7 + 5 = 12) ou soustractives (12 – 7 = 5). Cette étape suppose notamment que l'élève donne du sens à ces écritures par la mobilisation de faits numériques reconstruits puis progressivement mémorisés[89]. »

Des situations de référence pour assurer la continuité GS/CP et amorcer le calcul

Attendus de fin d'école maternelle

Commencer à résoudre des problèmes de composition de deux collections, d'ajout ou de retrait, de produit ou de partage (les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 10).

Attendus de fin de CP

— Résoudre des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes.
— Modéliser ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.
— Connaître le sens des signes – et +.

Le professeur au CP, à partir des apprentissages effectués en grande section, conduit ses élèves vers davantage d'abstraction : usage des signes – et + non usités en maternelle, modélisation à partir d'un énoncé. Alors qu'en grande section l'élève utilise le dessin, il tend progressivement vers une schématisation. Le champ numérique va passer de nombres allant jusqu'à 10 à des nombres allant jusqu'à 100. Si la progressivité des apprentissages doit être de mise, cela ne signifie pas pour autant qu'il faut évacuer la pratique de la manipulation et du dessin.

Pour aller plus loin, se référer à la partie « Les fondamentaux de la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes (maternelle/cycle 2) » du guide *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*[90].

Exemples de problèmes pour assurer la continuité et la progressivité des apprentissages

Les exemples de situations-problèmes présentés ci-après doivent permettre d'évoquer la continuité et la progressivité des apprentissages, de la grande section au CP, en résolution de problèmes.

89 — Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP : https://eduscol.education.fr/document/3738/download.

90 — Idem, p. 82-85.

SITUATION : LES ROUES DES VÉHICULES

En grande section : le professeur annonce avoir huit roues dans une malle opaque. « Combien peut-on équiper de motos ? », « Combien peut-on équiper de voitures ? », « Avec 10 roues, combien peut-on équiper de voitures et de motos ? »

En CP : le professeur annonce avoir dix-huit roues dans une malle opaque. « Combien peut-on équiper de motos ? », « Combien peut-on équiper de voitures ? », « Combien peut-on équiper de voitures et de motos ? »

SITUATION : UNE ASSIETTE POUR CHAQUE POUPÉE

Les évaluations nationales de début de CP pour la partie résolution de problèmes proposent les situations suivantes :

- « Il y a cinq chiens et trois os. Combien d'os faut-il ajouter pour que chaque chien ait un os ? »
- « C'est la récréation. Huit élèves veulent un vélo. La maîtresse n'a sorti que deux vélos. Combien de vélos doit-elle encore sortir pour que chaque élève ait un vélo ? »

En grande section, le professeur fait travailler la correspondance terme à terme, compétence prédictive pour résoudre des problèmes additifs ou soustractifs.

En manipulant et en verbalisant, l'élève associe une assiette à chaque poupée. Le professeur donne la consigne suivante : « Va chercher juste ce qu'il faut d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette. » La situation évolue ensuite : « J'ai cinq poupées et trois assiettes. Combien manque-t-il d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette ? » Cette situation travaillée, formalisée et structurée à l'école maternelle permet aux élèves de disposer des procédures utiles pour résoudre la situation des chiens ou des vélos lors de l'entrée au CP.

LE JEU DE LA BOÎTE

En termes de progression sur les nombres, la situation de la boîte, déjà vécue en grande section de maternelle, est proposée d'abord avec des nombres allant au moins jusqu'à 20 en période 1. En termes de progression sur les types de problèmes, la situation de la boîte est proposée dès le début de CP dans des situations d'ajout et de retrait de jetons, avec recherche de la quantité finale. Ensuite, elle évoluera vers des problèmes parties-tout avec recherche.

Pour aller plus loin, on pourra se référer à la partie « Comment passer du comptage au calcul ? » issue du guide *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*[91].

91 — *Ibid.*, voir note 89, p. 52-54.

Bibliographie

Chapitre 1

LIVRES, CHAPITRES, COMMUNICATION ET ARTICLES DE VULGARISATION

- Dehaene Stanislas, *La Bosse des maths*, Odile Jacob, Paris, 1997.
- Dehaene Stanislas, *La Bosse des maths : quinze ans après* (nouvelle édition revue et augmentée), Odile Jacob, Paris, 2010.
- Hirsh-Pasek Kathy, Golinkoff Roberta Michnick, Berk Laura E., Singer Dorothy G., *A Mandate for Playful Learning in Preschool : Presenting the Evidence*, Oxford University Press, 2009.
- Mazens Karine, « L'entrée dans les mathématiques chez l'enfant. Quelles préconisations pour l'apprentissage ? » *Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, n° 176, p. 37-44, 2022.
- Mazens Karine, Croset Marie-Caroline, « Développement et influence du SES sur différentes compétences mathématiques des enfants à l'école maternelle française », Symposium, Piaget-RIPSYDEVE, 26-27 juin, Genève, Suisse, 2023.
- Poletti Céline, Krenger Marie, Letang Marie, Thevenot Catherine, "Explicit Teaching of Finger Counting in Kindergarteners", conférence du 63e Psychonomic Society Annual Meeting, Boston (USA), 19 novembre 2022.
- Sarnecka Barbara W., Goldman Meghan C., Slusser Emily B., "How Counting Leads to Children's First Representations of Exact, Large Numbers" in Kadosh R. C., Dowker A. (Eds.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*, p. 291-309, Oxford University Press, 2015.
- Thevenot Catherine, « La relation entre doigts et nombres : que peuvent nous apprendre les enfants présentant une hémiplégie ? », *ANAE (Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant)*, n° 128, p. 47-52, 2014.
- Thevenot Catherine, « Le comptage sur les doigts pour la résolution de problèmes arithmétiques : avancée des connaissances », *ANAE (Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant)*, n° 180, p. 555-562, 2022.

ARTICLES SCIENTIFIQUES

- Andres Michael, Di Luca Samuel, Pesenti Mauro, “Finger-Counting : the Missing Tool ?”, *Behavioral & Brain Sciences*, n° 31, p. 642-643, 2008.
- Barner David, Thalwitz Dora, Wood Justin, Yang Shu-Ju, Carey Susan, “On the Relation Between the Acquisition of Singular-Plural Morpho-Syntax and the Conceptual Distinction Between One and More Than One”, *Developmental Science*, n° 10(3), p. 365-373, 2007.
- Baroody Arthur J., “The Development of Counting Strategies for Single-Digit Addition”, *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 18, p. 141-157, 1987.
- Barth Hilary, La Mont Kristen, Lipton Jennifer, Spelke Elizabeth S., “Abstract Number and Arithmetic in Preschool Children”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n° 102(39), p. 14116-14121, 2005.
- Benoit Laurent, Lehalle Henri, Molina Michèle, Tijus Charles, Jouen François, “Young Children’s Mapping Between Arrays, Number Words, and Digits”, *Cognition*, n° 129(1), p. 95-101, 2013.
- Brankaer Carmen, Ghesquière Pol, De Smedt Bert, “The Effect of a Numerical Domino Game on Numerical Magnitude Processing in Children With Mild Intellectual Disabilities”, *Mind, Brain, and Education*, n° 9(1), p. 29-39, 2015.
- Briars Diane, Siegler Robert S., “A Featural Analysis of Preschoolers’ Counting Knowledge”, *Developmental Psychology*, n° 20(4), p. 607-618, 1984.
- Carey Susan, “Bootstrapping & the Origin of Concepts”, *Daedalus*, n° 133(1), p. 59-68, 2004.
- Carey Susan, Shusterman Anna, Haward Paul, Distefano Rebecca, “Do Analog Number Representations Underlie the Meanings of Young Children’s Verbal Numerals?”, *Cognition*, n° 168, p. 243-255, 2017.
- Coubart Aurélie, Izard Véronique, Spelke Elizabeth S., Marie Julien, Streri Arlette, “Dissociation Between Small and Large Numerosities in Newborn Infants”, *Developmental Science*, n° 17(1), p. 11-22, 2014.

- Courtier Philippine, Gardes Marie-Line, Van der Henst Jean-Baptiste, Noveck Ira A., Croset Marie-Caroline, Epinat-Duclos Justine, Léone Jessica, Prado Jérôme, "Effects of Montessori Education on the Academic, Cognitive and Social Development of Disadvantaged Preschoolers : A Randomized Controlled Study in the French Public-School System", *Child Development*, n° 92(5), p. 2069-2088, 2021.
- Darnon Céline, Fayol Michel, "Can an Early Mathematical Intervention Boost the Progress of Children in Kindergarten? A Field Experiment", *European Journal of Psychology of Education*, n° 37, p. 1-18, 2021.
- Dehaene Stanislas, "Varieties of Numerical Abilities", *Cognition*, n° 44, p. 1-42, 1992.
- Dillon Moira R., Kannan Harini, Dean Joshua T., Spelke Elizabeth S., Duflo Esther, "Cognitive Science in the Field : A Preschool Intervention Durably Enhances Intuitive but not Formal Mathematics", *Science*, n° 357(6346), p. 47-55, 2017.
- Dupont-Boime Justine, Thevenot Catherine, "High Working Memory Capacity Favours the Use of Finger Counting in Six-Year-Old Children", *Journal of Cognitive Psychology*, n° 30, p. 35-42, 2018.
- Fayol Michel, Seron Xavier, "About Numerical Representations : Insight from Neuropsychological, Experimental, and Developmental Studies" in Campbell Jamie I. D. (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition*, Psychology Press : New York and Hove, p. 3-22, 2005.
- Feigenson Lisa, Carey Susan, "On the limits of Infants' Quantification of Small Object Arrays", *Cognition*, n° 97(3), p. 295-313, 2005.
- Feigenson Lisa, Dehaene Stanislas, Spelke Elizabeth S., "Core Systems of Number", *Trends in Cognitive Sciences*, n° 8(7), p. 307-314, 2004.
- Frank Michael C., Everett Daniel L., Fedorenko Evelina, Gibson Eward, "Number as a Cognitive Technology : Evidence from Pirahã Language and Cognition", *Cognition*, n° 108(3), p. 819-824, 2008.
- Geary David C., vanMarle Kristy, Chu Felicia W., Rouder Jeffrey, Hoard Mary K., Nugent Lara, "Early Conceptual Understanding of Cardinality Predicts Superior School-Entry Number-System Knowledge", *Psychological Science*, n° 29(2), p. 191-205, 2017.

- Gelman Rochel, Gallistel Charles Ransom, *The Child's Understanding of Number*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1978.
- Gilmore Camilla K., McCarthy Shannon E., Spelke Elizabeth S., "Symbolic Arithmetic Knowledge Without Instruction", *Nature*, n° 447(7144), p. 589-591, 2007.
- Gimbert Fanny, Camos Valérie, Gentaz Eduard, Mazens Karine, "What Predicts Mathematics Achievement? Developmental Change in 5-And 7-Year-Old Children", *Journal of Experimental Child Psychology*, n° 178, p. 104-120, 2019.
- Girard Cléa, Longo Léa, Chesnokova Hanna, Epinat-Duclos Justine, Prado Jérôme, "To What Extent Do Home Numeracy Practices and Parental Number Talk Relate to Children's Math Skills? A Pre-Registered Study in 5-Year-Old Children", *Learning and Individual Differences*, n° 106, 2023.
- Gunderson Elizabeth A., Spaepen Elizabet, Levine Susan C., "Approximate Number Word Knowledge Before the Cardinal Principle", *Journal of Experimental Child Psychology*, n° 130, p. 35-55, 2015.
- Halberda Justin, Feigenson Lisa, "Developmental Change in the Acuity of the 'Number Sense': The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults", *Developmental Psychology*, n° 44(5), p. 1457-1465, 2008.
- Hyde Daniel C., "Two Systems of Non-Symbolic Numerical Cognition", *Frontiers in Human Neuroscience*, n° 5, 2011.
- Hyde Daniel C., Mou Yi, Berteletti Ilaria, Spelke Elizabeth S., Dehaene Stanislas, Piazza Manuela, "Testing the role of symbols in preschool numeracy: An Experimental Computer-Based Intervention Study", *PLoS ONE*, n° 16(11), e0259775, 2021.
- Izard Véronique, Sann Coralie, Spelke Elisabeth S., Streri Arlette, "Newborn Infants Perceive Abstract Numbers", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n° 106(25), p. 10382-10385, 2009.
- McCrink Koleen, Wynn Karen, "Ratio Abstraction by 6-Month-Old Infants", *Psychological Science*, n° 18(8), p. 740-745, 2007.
- McCrink Koleen, Wynn Karen, "Large-Number Addition and Subtraction by 9-Month-Old Infants", *Psychological Science*, n° 15(11), p. 776-781, 2004.
- Mou Yi, vanMarle Kristy, "Two Core Systems of Numerical Representation in Infants", *Developmental Review*, n° 34(1), p. 1-25, 2014.
- Mou Yi, Zhang Bo, Hyde Daniel C., "Directionality in the Interrelations Between Approximate Number, Verbal Number, and Mathematics in Preschool-Aged Children", *Child Development*, n° 94(2), p. 67-84, 2022.

- Pica Pierre, Lemer Cathy, Izard Véronique, Dehaene Stanislas, “Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group”, *Science*, n° 306(5695), p. 499-503, 2004.
- Poletti Céline, Krenger Marie, Dupont-Boime Justine, Thevenot Catherine, “Evolution of Finger Counting Between Kindergarten and Grade 2”, *Children*, n° 9(2), p. 132, 2022.
- Sarnecka Barbara W., Gelman Susan A., “Six Does Not Just Mean a Lot : Preschoolers See Number Words as Specific”, *Cognition*, n° 92(3), p. 329-352, 2004.
- Sarnecka Barbara W., Negen James, Goldman Meghan C., “Chapter 9 - Early Number Knowledge in Dual-Language Learners From Low-SES Households” in Berch Daniel B., Geary David C., Mann Koepke Kathleen (Eds.), *Language and Culture in Mathematical Cognition*, p. 197-227, Academic Press, 2018.
- Schneider Rose M., Brockbank Erik, Feiman Roman, Barner David, “Counting and the Ontogenetic Origins of Exact Equality”, *Cognition*, n° 218, 2022.
- Siegler Robert S., “Magnitude Knowledge : The Common Core of Numerical Development”, *Developmental Science*, n° 19(3), p. 341-361, 2016.
- Sinclair Nathalie, Pimm David John, “Mathematics Using Multiple Senses : Developing Finger Gnosis with Three- and Four-Year-Olds in an Era of Multi-Touch Technologies”, *Asia-Pacific Journal of Research in Early Childhood Education*, n° 9(3), p. 99-110, 2015.
- Spaepen Elizabet, Coppola Marie, Spelke Elizabeth S., Carey Susan E., Goldin-Meadow Susan, “Number Without a Language Model”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n° 108(8), p. 3163-3168, 2011.
- Thevenot Catherine, Castel Caroline, Danjon Juliette, Renaud Olivier, Ballaz Cécile, Baggioni Laetitia, Fluss Joël, “Numerical Abilities in Children with Congenital Hemiplegia : an Investigation of the Role of Finger Use in Number Processing”, *Developmental Neuropsychology*, n° 39, p. 88-100, 2014.
- Thomas Aude, Tazouti Youssef, Hoareau Lara, Luxembourger Christophe, Hubert Blandine, Jarlégan Annette, “Early Numeracy Assessment in French Preschool : Structural Analysis and Links With Children’s Characteristics”, *International Journal of Early Years Education*, 2021.

- Zur Osnat, Gelman Rochel, “Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking”, *Early Childhood Research Quaterly*, n° 19, p. 121-137, 2004.

Chapitre 2

- Allard Cécile, « Étude du processus d’institutionnalisation dans les pratiques de fin d’école primaire : le cas de l’enseignement des fractions », thèse de doctorat de l’université Paris-VII, 2015.
- Allard Cécile, Mamede Maíra, « Étude des conditions nécessaires pour favoriser l’exercice de la vigilance didactique des formateurs en formation initiale ciblée sur les liens entre apports théoriques et pratiques en classe », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Thématique 1|2023, p. 341-376, 2022.
- Briand Joël, « Enseigner l’énumération en moyenne section », *Grand N*, n° 66, p. 7-22, 2000.
- Briand Joël, Loubet Martine, Salin Marie-Hélène, *Apprentissages mathématiques à l’école maternelle*, Hatier, Paris, Collection : pédagogie, 2004.
- Brissiaud Rémi, « Calculer et compter de la petite section à la grande section », *Grand N*, n° 49, p. 37-48, 1991.
- Broccolichi Sylvain, Roditi Éric, « Analyses didactique et sociologique d’une pratique enseignante », *Revue française de pédagogie*, n° 188, p. 39-50, 2014.
- Brousseau Guy, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1998.
- Charnay Roland, Valentin Dominique, « Calcul ou comptage ? Calcul et comptage ! », *Grand N*, n° 50, p. 11-20, 1991.
- Coulange Lalina, « Les pratiques langagières au cœur de l’institutionnalisation de savoirs mathématiques », *Spirale – Revue de recherches en éducation*, n° 54, p. 9-27, 2014.
- Douady Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 7(2), p. 5-32, 1986.

— Gréco Pierre, « Quantité et quotité. Nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles », dans Gréco Pierre, Morf Albert, *Structures numériques élémentaires*, p. 1-70, PUF, Paris, 1962.

— Hersant Magali, « Faire des mathématiques à l'école maternelle : À quelles conditions ? », *Grand N*, n° 110, p. 4-16, 2022.

— Hersant Magali, « Pratiques de débutants en mathématiques en maternelle : matérialité des situations et chronologie », *Revue française de pédagogie*, n° 208, p. 18-30, 2020.

— Hersant Magali, Thomas Yves, *Maths à grand pas pour les GS*, Retz, Paris, 2019.

— Hersant Magali, Thomas Yves, *Maths à grand pas pour les PS-MS*, Retz, Paris, 2019.

— Margolinas Claire, « Essai de généalogie en didactique des mathématiques », INRP, UMR ADEF, Marseille, 2004.

— Margolinas Claire, Wozniak Floriane, *Le Nombre à l'école maternelle, une approche didactique*, De Boeck, Bruxelles, 2012.

— Peltier Marie-Lise (dir.), *Dur d'enseigner en ZEP. Analyse des pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire*, La Pensée sauvage, Grenoble, 2004.

— Perrin-Glorian Marie-Jeanne, « Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes "faibles" », *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 13(1, 2), p. 5-118, 1993.

— Piaget Jean, Szeminska Alina, *La Genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neufchâtel, 1941.

— Roditi Éric, « L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant », *Spirale – Revue de recherches en éducation*, n° 36, p. 37-52, 2005.

Focus sur les inégalités genrées

— Bardet Julie, « Stéréotypes de genre : analyse verbale et comportementale dans le contexte de la manipulation de jouets au cours d'interactions entre parents et enfants de trois ans », thèse de doctorat, université Grenoble Alpes, 2021.

— Benit Stéphane, Sarremejane Philippe, « Les effets des pratiques évaluatives sur les élèves de maternelle », *Pratiques sociales et apprentissages*, 2017.

- Carlana Michela, "Implicit stereotypes: Evidence from teachers' Gender Bias", *The Quarterly Journal of Economics*, n° 134(3), p. 1163-1224, 2019.
- De Boissieu Corinne, « Sexes et genres à l'école maternelle. Un essai de modélisation du concept de "genre scolaire" », *Recherches & éducations*, n° 2, p. 23-43, 2009.
- Désert Michel, « Les effets de la menace du stéréotype et du statut minoritaire dans un groupe », *Diversité – Ville, école, intégration*, n° 138, p. 31-36, 2004.
- Dias-Chiaruttini Ana, « Réception des stéréotypes genrés véhiculés par la littérature de jeunesse dans des espaces institutionnels contrastés », *Repères. Recherches en didactique du français langue maternelle*, n° 51, p. 35-54, 2015.
- Duru-Bellat Marie, « À l'école du genre », *Enfances & Psy*, n° 1, p. 90-100, 2016.
- Ferrière Séverine, Morin-Messabel Christine, « Adhésion/transgression des stéréotypes de sexe dans un album de jeunesse : analyse en lecture offerte », *Psychologie et éducation*, n° 1, 2013.
- Fischer Jean-Paul, Thierry Xavier, "Boy's Math Performance, Compared to Girls', Jumps at Age 6 (in the ELFE's Data at Least)", *British Journal of Developmental Psychology*, n° 40, p. 504-519, 2022.
- Huguet Pascal, Regner Isabelle, "Stereotype Threat Among Schoolgirls in Quasi-Ordinary Classroom Circumstances", *Journal of Educational Psychology*, n° 99(3), p. 545, 2007.
- Jarlégan Annette, « Genre et dynamique interactionnelle dans la salle de classe : permanences et changements dans les modalités de distribution de la parole », *Le français aujourd'hui*, n° 193, p. 77-86, 2016.
- Jarlégan Annette, « La fabrication des différences : sexe et mathématiques à l'école élémentaire », thèse de doctorat, université de Bourgogne, Dijon, 1999.
- Jarlégan Annette, Tazouti Youssef, « Le genre à l'école maternelle : les représentations, jugements et attentes des enseignantes de grande section », *Éducation et socialisation, Les Cahiers du CERFEE*, n° 32, 2012.
- Mosconi Nicole, « Comment les pratiques enseignantes fabriquent-elles de l'inégalité entre les sexes ? », *Les dossiers des sciences de l'éducation*, n° 5(1), p. 97-109, 2001.
- Pasquier Gaël, « La cour de récréation au prisme du genre, lieu de transformation des responsabilités des enseignant-e-s à l'école primaire », *Revue des sciences de l'éducation*, n° 41(1), p. 91-114, 2015.

- Steele Claude M., Aronson Joshua, "Stereotype Threat and the Intellectual Test Performance of African Americans", *Journal of Personality and Social Psychology*, n° 69(5), p. 797, 1995.
- Zaidman Claude, *La Mixité à l'école primaire*, L'Harmattan, Paris, 1996.

Chapitre 3

- Duprey Gaëtan et Sophie, Sautenet Catherine, *Vers les Maths PS, MS et GS*, Accès éditions, Strasbourg, réédition 2023.
- Duprey Gaëtan, « Résoudre des problèmes à l'école maternelle », Séminaire national des RMC, Plan mathématiques, Poitiers, MENJS, 2022.
- Pfaff Nathalie, Hannon Christelle, Newiadomy Nathalie, Saliou Sylvie, Visgueiro Aurélie, *Enseigner le nombre à la maternelle*, Retz, Paris, 2018.

Focus sur les activités ritualisées

- Amigues René, Zerbato-Poudou Marie-Thérèse, *Comment l'enfant devient élève. Les apprentissages à l'école maternelle*, Retz, Paris, 2000.
- Association générale des instituteurs et institutrices des écoles maternelles publiques (AGIEM), *Rites et rituels à l'école maternelle*, CD-Rom, Collection École maternelle : les outils de l'AGIEM, 2006.
- Briquet-Duhazé Sophie, Quibel-Périnelle Fabienne, *Les Rituels à l'école maternelle*, Bordas, Paris, 2006.
- Dumas Catherine, *Construire les rituels à la maternelle*, Retz, Paris, 2009.
- Marquié-Dubie Hélène, *Activités ritualisées en maternelle*, Scéren-CRDP, Montpellier, 2009.

Conception graphique et éditoriale
Délégation à la communication

Suivi éditorial
Julie Mege

Exécution graphique
Opixido

Suivi de fabrication
Service de l'action administrative
et des moyens

Août 2023

ISBN 978-2-11-167961-0
ISSN 2966-537X